15/03/2017

SIA $K=\mathbb{R}$ E SIA $V=\{p(x)=ax^2+bx+c \mid x\in[0;1]\}$

$p:[0;1]\to\mathbb{R}$ SONO FORME, FUNZIONI POLINOMIALI

$x \longrightarrow ax^2+bx+c$

V È UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE 3. UNA SUA BASE È $B_V=\{x^2;x;1\}$ → (OGNI POLINOMIO SI PUÒ COSTRUIRE COME COMBINAZIONE LINEARE DI QUESTI 3 VETTORI E SONO LINEARMENTE INDIPEND.)

CONSIDERO V^*: È LO SPAZIO DUALE DI V ⇒ $\dim V^*=3$,

$V^*=\{\phi: V\to\mathbb{R} : \phi \text{ LINEARE}\}$ CONSIDERO 3 VETTORI ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3 APPARTENENTI A V^* COSÌ DEFINITI: $\phi_1(p)=\int_0^1 p(x)\,dx$ (È UNO SCALARE!)

$\underbrace{\phi_2(p)=p'(1)}_{\text{(OTTENGO COME RISULTATO UNO SCALARE!)}}$; $\phi_3(p)=p(0)$

• DIMOSTRIAMO CHE $\{\phi_1;\phi_2;\phi_3\}$ COSTITUISCE UNA BASE DI V^* →

→ È SUFFICIENTE DIMOSTRARE CHE SIANO LIN. INDIP. POICHÈ ESSENDO $\dim V^*=3$, SARANNO AUTONOMAMENTE GENERATORI

PONGO $\lambda_1\phi_1+\lambda_2\phi_2+\lambda_3\phi_3=0 \Rightarrow (\lambda_1\phi_1+\lambda_2\phi_2+\lambda_3\phi_3)(p(x))=0$

$\forall p(x)\in V \Rightarrow (\lambda_1\phi_1+\lambda_2\phi_2+\lambda_3\phi_3)(ax^2+bx+c)=0$

$\forall a,b,c\in\mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1\phi_1(ax^2+bx+c)+\lambda_2\phi_2(ax^2+bx+c)+$

$+\lambda_3\phi_3(ax^2+bx+c)=0 \Rightarrow \lambda_1\int_0^1(ax^2+bx+c)dx+\lambda_2(ax^2+\ldots$

$\ldots+bx+c)'(1)+\lambda_3(ax^2+bx+c)\Big|_{x=0}=0$

$\Rightarrow \lambda_1\left(a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+cx\right)\Big|_0^1+\lambda_2(2ax+b)(1)+c\lambda_3=0$

$\Rightarrow \lambda_1\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c\right)+\lambda_2(2a+b)+c\lambda_3=0 \Longrightarrow$

$\Rightarrow$ SE $b=c=0 \Rightarrow$ $\frac{a}{3}\lambda_1 + 2a\lambda_2 = 0$

SE $a=b=0 \Rightarrow$ $\lambda_1 c + c\lambda_3 = 0$ SI SEMPLIFICA b E c

SE $a=c=0 \Rightarrow$ $\frac{b}{2}\lambda_1 + b\lambda_2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow$ I 3 VETTORI SONO LIN. INDIP. E QUINDI COSTITUISCONO UNA BASE DI V^* ESSENDO QUINDI ANCHE GENERATORI.

- ~~[illegible]~~ DATA LA BASE $B_{V^*} = \{\phi_1 ; \phi_2 ; \phi_3\}$ DETERMINARE LA BASE DUALE IN $V^{**} = \{\psi : V^* \longrightarrow \mathbb{R}\}$: SAPPIAMO CHE V^{**} È ISOMORFO A V $\Rightarrow$

CERCO $V_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$; $V_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2$

$V_3 = a_3x^2 + b_3x + c_3$ IN MODO TALE CHE $\{V_1, V_2, V_3\}$ COSTITUISCA LA BASE DUALE DI $B_V = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ $\Rightarrow$ PER COME È DEFINITA LA BASE DUALE,

$$\Rightarrow \text{IMPONGO: } \begin{cases} \phi_1(V_1) = 1 \\ \phi_2(V_1) = 0 \\ \phi_3(V_1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \phi_1(a_1x^2 + b_1x + c_1) = 1 \\ \phi_2(a_1x^2 + b_1x + c_1) = 0 \\ \phi_3(a_1x^2 + b_1x + c_1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 (a_1x^2 + b_1x + c_1)\,dx = 1 \\ 2a_1x + b_1\big|_{x=1} = 0 \\ a_1x^2 + b_1x + c_1\big|_{x=0} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1\frac{x^3}{3} + b_1\frac{x^2}{2} + c_1x\Big|_0^1 = 1 \\ 2a_1 + b_1 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{3}{2} \\ b_1 = 3 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/3 & 1/2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

POSSIAMO RISOLVERE I TRE SISTEMI INSIEME RIDUCENDO A FORMA A GRADINI CANONICA LA MATRICE A FIANCO MEDIANTE TRASFORMAZIONI ELEMENTARI RIGA

$V_1 = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$ ANALOGAMENTE PER V_2 E V_3 TROVIAMO:

$V_2 = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$ E $V_3 = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1 \Rightarrow \{V_1, V_2, V_3\}$ È LA BASE DUALE CERCATA

FORME BILINEARI

SU UNO SPAZIO VETTORIALE V, m-DIMENSIONALE

DEFINIZIONE: UNA FORMA BILINEARE SU V È UN'APPLICAZIONE

$F: V \times V \longrightarrow K$ (K CAMPO SU CUI È DEFINITO V)

$(v;w) \longrightarrow F((v;w))$ TALI CHE:

1) $F((\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w)) = \alpha_1 F((v_1;w)) + \alpha_2 F((v_2;w))$ $\forall v_1, v_2, w \in V$ E $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in K$

2) $F(v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2)) = \beta_1 F((v;w_1)) + \beta_2 F((v,w_2))$ $\forall v, w_1, w_2 \in V$ E $\forall \beta_1, \beta_2 \in K$

ESEMPIO:

$V = \mathbb{R}$ E $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ È FORMA BILINEARE

$(x;y) \longrightarrow xy$

INFATTI:

1) $F((\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w)) = F((\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y)) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)y =$
$= \alpha_1 x_1 y + \alpha_2 x_2 y = \alpha_1 F((x_1, y)) + \alpha_2 F((x_2;y))$

2) $F((v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = F((x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2)) = x(\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) =$
$= x\beta_1 y_1 + x\beta_2 y_2 = \beta_1 x y_1 + \beta_2 x y_2 = \beta_1 F((x;y_1)) + \beta_2 F((x;y_2))$

OSSERVAZIONE: UNA FORMA BILINEARE NON È, IN GENERALE, UN'APPLICAZIONE LINEARE.

CONTROESEMPIO:

CONSIDERO $F((x;y)) = xy$*: PERCHÉ SIA LINEARE OCCORRE CHE

$$F((x_1;y_1)+(x_2;y_2)) = F((x_1,y_1)) + F((x_2;y_2)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F((x_1+x_2, y_1+y_2)) = (x_1+x_2)(y_1+y_2) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$$

$$F((x_1;y_1)) + F((x_2;y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2 \neq F((x_1;y_1)+(x_2;y_2))$$ ■

IN V, FISSO UNA BASE $B_V = \{v_1 \dots v_n\}$ E CONSIDERO $F: V \times V \to K$ BILINEARE $\Rightarrow$ F È DATA SE CONOSCO $F((v,w))$ PER UNA QUALUNQUE COPPIA $(v,w) \in V \times V$ $\Rightarrow$ POSTO $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ E $w = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow F((v,w)) = F\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{i=1}^{n} y_i v_i\right)\right) \Rightarrow x_1 F\left(\left(v_1; \sum_{i=1}^{n} y_i v_i\right)\right) + \dots$$

$$+ x_2 F\left(\left(v_2, \sum_{i=1}^{n} y_i v_i\right)\right) + \dots + x_n F\left(\left(v_n; \sum_{i=1}^{n} y_i v_i\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i F((v_i,w)) = x_1y_1 F((v_1,v_1)) + x_1y_2 F((v_1;v_2)) + \dots + x_1y_n F((v_1,v_n)) + \dots$$

$$\dots + x_2y_1 F((v_2;v_1)) + x_2y_2 F((v_2,v_2)) + \dots + x_2y_n F((v_2;v_n)) + \dots +$$

$$\dots + x_ny_2 F((v_n,v_2)) + \dots + x_ny_n F((v_n,v_n))$$

PERTANTO L'ESPRESSIONE "ANALITICA" DI $F((v,w))$ È DATA DA UN POLINOMIO OMOGENEO DI SECONDO GRADO NELLE COORDINATE DEGLI SPAZI

ESEMPIO: 1) $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longrightarrow \sqrt{2}\, x_1y_1 + \frac{2}{3} x_1y_2$$

2) $G: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \longrightarrow x_1y_2 - x_2y_1$$

MICHELE BELLINI

15/03/17