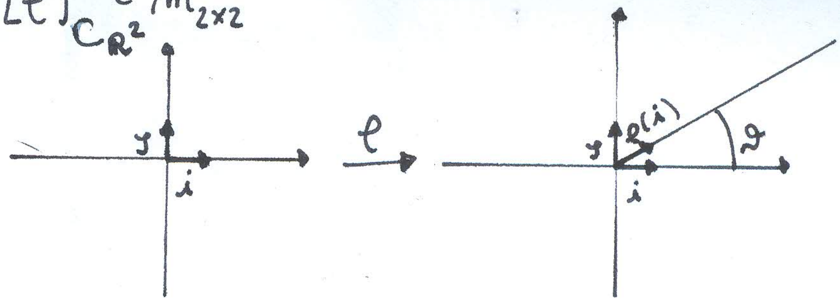
$\ell: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\ell$ è una rotazione di angolo $\vartheta$, con $0<\vartheta<\pi$, in verso antiorario: dare la $[\ell]_{C_{\mathbb{R}^2}}$

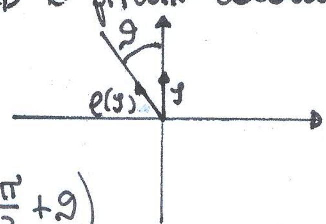
La matrice associata $[\ell]_{C_{\mathbb{R}^2}} \in M_{2\times 2}$

$B_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$




Cerco la combinazione lineare di $i$ e $j$ che mi dia $\ell(i)$:

$\ell(i) = i\cos\vartheta + j\sin\vartheta \Rightarrow$ la prima colonna di $[\ell]_{C_{\mathbb{R}^2}}$ è $\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\end{pmatrix}$




$\ell(j) = -i\sin\vartheta + j\cos\vartheta$

$= i\cos\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right)$

$\Rightarrow$ la seconda colonna è $\begin{pmatrix}-\sin\vartheta\\ \cos\vartheta\end{pmatrix}$. $[\ell]_{C_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix}\cos\vartheta & -\sin\vartheta\\ \sin\vartheta & \cos\vartheta\end{pmatrix}$

Non esistono sottospazi invarianti (non banali).

<u>Definizione</u>: Data $L: V \to V$ lineare, uno scalare $\lambda \in K$ ($K$ è il campo su cui è definito $V$) è detto <u>autovalore</u> di $L$ se esiste $v \neq 0$ tale che $L(v) = \lambda v$. Tale vettore $v$ è detto <u>autovettore</u> relativo all'autovalore $\lambda$.

<u>Osservazione</u>: Dato $\lambda$ autovalore, esistono infiniti autovettori ad esso relativi. Infatti considero un vettore $w = m \cdot v$, con $m \in K$ ($w$ multiplo di $v$).

$L(w) = L(mv) \underbrace{=}_{\text{x la linearità}} mL(v) = m(\lambda v) \underbrace{=}_{\text{x p. commutativa}} \lambda(mv) = \lambda w$

Abbiamo dimostrato che tutti i multipli di un autovettore relativo ad un autovalore $\lambda$ sono autovettori relativi allo stesso autovalore.

<u>Esercizio</u>: $E_\lambda = \{v \in V$ tali che $L(v) = \lambda v\} \cup \{0\}$ è un sottospazio vettoriale di $V$.

Da dimostrare: 1) Dati $v_1, v_2 \in E_\lambda \Rightarrow v_1 + v_2 \in E_\lambda$
(cioè dimostro che $E_\lambda$ è chiuso rispetto alla somma)
2) Dato $v \in E_\lambda \Rightarrow kv \in E_\lambda$ ($E_\lambda$ È CHIUSO RISPETTO AL PRODOTTO PER UNO SCALARE)

1) ipotesi: $L(v_1) = \lambda v_1$ e $L(v_2) = \lambda v_2$ tesi: $L(v_1+v_2) = \lambda(v_1+v_2)$

$L(v_1+v_2) = L(v_1) + L(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1+v_2)$ CVD

2) $L(kv) = \lambda(kv)$ tesi

$L(kv) = kL(v) = k(\lambda v) = \lambda(kv)$ CVD

3) $0 \in E_\lambda$ per costruzione $\Rightarrow E_\lambda$ è un sottospazio vettoriale.

- $E_\lambda$ è detto <u>autospazio</u> relativo all'autovalore $\lambda$. Per come è costruito, è chiaro che $E_\lambda$ è un sottospazio invariante per L.
È vero anche il contrario? Viceversa, $\exists$ sottospazi invarianti che non sono autospazi, quindi no.

<u>ESEMPIO</u> $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y) \mapsto (x,0)$

Abbiamo trovato due sottospazi invarianti non banali: $y=0$ e $x=0$
Sono autospazi? E se sì, a quali autovalori sono relativi?
Considero $y=0$. I vettori di tale retta hanno coordinate $(x,0)$
$\Rightarrow$ prendo $v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ e cerco $L(v) = L\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = v$
$\Rightarrow$ $y=0$ è un autospazio relativo all'autovalore 1
Considero $x=0$. Se $v \in$ retta $x=0 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow L(v) = L\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow$ $x=0$ è un autospazio relativo a $\lambda = 0$ c.v.d.

<u>OSSERV.</u> L'autospazio relativo all'autovalore 0 è il nucleo dell'applicazione, e viceversa il nucleo, se esiste ed è $\neq 0$, è sempre l'autospazio relativo a $\lambda = 0$. Ovvero $\ker L = E_0$

- Se ho un autovettore, può essere riferito a due autovalori diversi? Cioè è possibile trovare $\lambda$ e $\mu \in K$ con $\lambda \neq \mu$ tali che dato $v \in V$, $L(v) = \lambda \cdot v$ e $L(v) = \mu \cdot v$? Poiché $\underset{\lambda v}{\underset{\shortparallel}{L(v)}} = \underset{\mu v}{\underset{\shortparallel}{L(v)}} \Rightarrow \lambda v = \mu v \Rightarrow \lambda v - \mu v = 0$
$\Rightarrow (\lambda - \mu) v = 0$ v non è nullo poiché è un autovettore.
$\Rightarrow \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu$ Dunque la risposta è no.!

- <u>Proposizione</u>: Autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearm. indipen.
<u>Dimostrazione</u> per induzione sul numero di autovettori:
1) verifica nel caso del numero naturale più basso possibile: $n=1$
Ho un solo autovettore: ovvio.
2) Si suppone verificata la proposizione fino a $n-1$ e la dimostriamo per n vettori.
Siano $v_1, \dots, v_n$ autovettori relativi agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ con $\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j$.
Devo dimostrare che data $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0 \ \forall j$.
So che $L(v_j) = \lambda_j v_j \ \forall j = 1, \dots, n$ con L applicazione lineare.
Considero $L\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = L(0) = 0 \Rightarrow$ per la linearità di L, $L(\sum \alpha_j v_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (L(v_j)) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j v_j$
Moltiplico entrambi i membri per $\lambda_n \neq 0$
$\Rightarrow \lambda_n \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = \lambda_n \cdot 0 = 0 \Rightarrow \sum \lambda_n \alpha_j v_j = 0$
$\Rightarrow$ pongo a sistema: $\begin{cases} \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n v_n = 0 \\ \alpha_1 \lambda_n v_1 + \alpha_2 \lambda_n v_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n v_n = 0 \end{cases}$ Sottraggo membro a membro la prima equazione dalla seconda

Raccolgo $\alpha_1 v_1$, $\alpha_2 v_2$ etc. Ottengo: $\alpha_1 v_1 (\lambda_1 - \lambda_n) + \alpha_2 v_2 (\lambda_2 - \lambda_n) + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) = 0$
Per ipotesi (fino a $n-1$ la proposizione era dimostrata) $v_1, \dots, v_{n-1}$ sono linearm. indipendenti. $\Rightarrow \alpha_j (\lambda_j - \lambda_n) = 0 \ \forall j = 1, \dots, n-1$ ma $\lambda_j - \lambda_n \neq 0 \ \forall j$
$\Rightarrow \alpha_j = 0 \ \forall j = 1, \dots, n-1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0$ si riduce a $\alpha_n v_n = 0$ (poiché tutti gli $\alpha_j \ \forall j = 1, \dots, n-1$ sono nulli) ma $v_n \neq 0 \Rightarrow \alpha_n = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0 \ \forall j = 1, \dots, n$. CVD