12 - 10 - 16

ESERCIZIO : CALCOLO DEL DETERMINANTE

$$A = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{2} & 1 \\ 4 & 0 & -5 \\ 7/5 & 8 & -2 \end{pmatrix} \qquad |A| = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{ij} \, |A_{ij}|$$

CONVIENE SVILUPPARLO SCEGLIENDO UNA RIGA O COLONNA CON ZERI: AD ESEMPIO LA SECONDA RIGA:

$$= (-1)^3 \, 4 \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}(-5) \begin{vmatrix} 5 & \sqrt{2} \\ 7/5 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$-4(-2\sqrt{2}-8) + 5\left(40 - 7/5 \cdot \sqrt{2}\right) = \sqrt{2} + 322$$

PROPOSIZIONE: IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE DIAGONALE

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ è } |D| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} .$$

SI DIMOSTRA SVILUPPANDO IL DETERMINANTE SECONDO UNA QUALUNQUE RIGA

PROPOSIZIONE:

a) Se una matrice A presenta una riga con tutte le entrate nulle, (o una colonna di zeri) $\Rightarrow |A| = 0$
(SI DIMOSTRA SUBITO SVILUPPANDO IL DET. SECONDO TALE RIGA)

b) Se in una matrice A, una riga R_i è multipla di una riga R_j

$\Rightarrow |A| = 0$

Dimostrazione della proposizione b)

EX
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{kR_1 - R_2 \to R_2} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} = A'$$

POICHÉ

$$|A'| = 0 \Rightarrow |A| = 0$$

c) Se in una matrice A, una riga è combinazione lineare di DUE O PIU' ALTRE RIGHE DELLA MATRICE $\Rightarrow |A| = 0 \rightarrow$ (DA DIMOSTRARE PER ESERCIZIO)

PROPOSIZIONE:

Il determinante di una matrice triangolare è dato dal prodotto

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Dimostrazione per induzione

1) PASSO verifica per $n=1$ $\quad A = \alpha \Rightarrow |A| = \alpha$

verifica per $n=2$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot 0 =$

$= a_{11} a_{22}$.

2) PASSO supponiamo verificata la proposizione fino a $n=k$ e dimostriamola per $n=k+1$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1\,k+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & a_{33} \\ a_{k+1\,1} & \cdots & a_{k+1\,k+1} \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & a_{33} \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k+1\,1} & \cdots & a_{k+1\,k+1} \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ per ipotesi induttiva $\begin{vmatrix} a_{22} & 0 \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ a_{k+1\,1} & & a_{k+1\,k+1} \end{vmatrix} = \prod_{j=2}^{k+1} a_{jj}$

$\Rightarrow |A| = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \cdots a_{k+1\,k+1}$ $\qquad$ c.v.d.

12-10-16 2f.

Considero $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow AB \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Si ha la proposizione (TEOREMA di BINET):

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

PROPOSIZIONE:

Sia $k \in \mathbb{R}$ e kA la matrice ottenuta mediante la moltiplicazione per uno scalare $\Rightarrow |kA| = k^n |A|$.

(per la dimostrazione usare l'operazione elementare di moltiplicazione per uno scalare su tutte le righe e individuare il suo rapporto col determinante)

OSSERVAZIONE:

Data $|A+B| \Rightarrow |A+B| \neq |A| + |B|$

Controesempio $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow |A| = -1 \quad |B| = 6 \quad |A+B| = 3 \Rightarrow 3 \neq -1 - 6$

Proposizione

Sia $A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_i + R_i' \\ R_{i+1} \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$

[R_j INDICA LA j-ESIMA RIGA DELLA MATRICE $\forall j$]

[LA i-ESIMA RIGA È DATA DALLA SOMMA DI DUE RIGHE R_i E R_i']

ESEMPIO:

$\begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad 1 = 0+1 \quad 2 = -3+5 \quad 3 = 2+1$

$\boxed{1 \quad 2 \quad 3}$

$(0 \quad -3 \quad 2) + (1 \quad 5 \quad 1)$

VEDIAMO 1 COME 0+1,
VEDIAMO 2 COME -3+5
VEDIAMO 3 COME 2+1

$\Rightarrow$ POSSO CONSIDERARE LA PRIMA RIGA (1 2 3) COME OTTENUTA SOMMANDO (0 -3 2) + (1 5 1)

Proposizione

Sia $A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_i + R_i' \\ R_{i+1} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_i \\ R_{i+1} \\ R_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2' \\ R_i' \\ R_{i+1} \\ R_n \end{vmatrix}$

NELL'ESEMPIO DATO: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

PROPOSIZIONE

L'operazione elementare di sostituzione di una riga con la somma di quella riga con un multiplo di un'altra riga lascia invariato il determinante

Dim.

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_i \\ R_j \\ R_{j+1} \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ j \to \end{array} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_i \\ R_j + kR_i \\ R_{j+1} \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} R_1 \\ \\ R_i \\ R_j + kR_i \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} \underset{j \to}{=} \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_i \\ R_j \\ R_{j+1} \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_1 \\ \\ R_i \\ kR_i \\ R_{j+1} \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_i \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} + 0$$

c.v.d.

Data $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,n}} \Rightarrow A^T \in \mathcal{M}_{n \times k}$ e $A^T = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,k}}$

con $b_{ij} = a_{ji}$

EX $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}_{2 \times 4} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}_{4 \times 2}$

Proposizione

Se $A \in \mathcal{M}_{n \times m} \Rightarrow |A^T| = |A|$ (DA DIMOSTRARE PER ESERCIZIO)

12-10-16 3f

Definizione

Se $A \in M_{n\times n}$ è tale che $A \equiv A^T$ (coincide) $\Rightarrow$ A è detta SIMMETRICA

Proposizione

1. Siano $A, B \in M_{n\times n} \Rightarrow (A+B)^T = A^T + B^T$
2. Sia $A \in M_{n\times n}$ e $B \in M_{n\times p} \Rightarrow (A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Def.

Si dice inversa di una matrice quadrata A quella matrice che si indica con A^{-1}, tale che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Osservazione: Non tutte le matrici sono invertibili

Proposizione

Se A è invertibile $\Rightarrow$ data A^{-1} si ha che

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

dim.

So che $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I| \Rightarrow$

$\Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

e patto che $|A| \neq 0$

CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ A SIA INVERTIBILE È CHE $\det A \neq 0$.

Proposizioni

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$