Continuo Metodo di Gauss ... 12-04-17 (1)

2) Caso in cui non compaiono i quadrati di x_i e x_j, ad esempio per x_1 e x_2: $Q(X) = a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{14}x_1x_4 + \dots + a_{1n}x_1x_n + a_{23}x_2x_3 + \dots + a_{33}x_3^2 \dots$

Supponiamo vera la proposizione fino a $n = k-1$ e la dimostriamo per $n = k$, con $n = \dim \mathbb{R}^n$.

Nell'ottica di ridursi ad esaminare una forma quadratica con un # di variabili $< k$, per poter adoperare l'ipotesi induttiva, scriviamo,

TORNANDO AL CASO GENERALE:

$$Q\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = a_{12}x_1x_2 + x_1\left(\sum_{j=3}^{k} a_{1j}x_j\right) + x_2\left(\sum_{j=3}^{k} a_{2j}x_j\right) + \overset{\text{FORMA QUADRATICA}}{Q_1}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} =$$

$$= a_{12}x_1x_2 + x_1 L_1(x_3, \dots, x_k) + x_2 L_2(x_3, \dots, x_k) + Q_1(x_3, \dots, x_k) =$$

$$= a_{12}\left(x_1x_2 + \frac{x_1L_1(x_3, \dots, x_k)}{a_{12}} + \frac{x_2L_2(x_3, \dots, x_k)}{a_{12}}\right) + Q_1(x_3, \dots, x_k) =$$

$$= a_{12}\left(x_1 + \frac{L_2}{a_{12}}\right)\left(x_2 + \frac{L_1}{a_{12}}\right) \underbrace{- \frac{L_1L_2}{a_{12}} + Q_1(x_3, \dots, x_k)}$$

$\leftarrow \overset{\text{FORMA QUADRATICA}}{Q_2}(x_3, \dots, x_k)$

Opero una trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + L_2/a_{12} \\ y_2 = x_2 + L_1/a_{12} \\ y_3 = x_3 \\ \vdots \\ y_k = x_k \end{cases} \Rightarrow Q(Y) = a_{12}y_1y_2 + Q_2(y_3, \dots, y_k)$$

ricordando che: $y_1 y_2 = \dfrac{(y_1+y_2)^2-(y_1-y_2)^2}{4}$ avremo che:

$$Q(Y) = a_{12}\left[\frac{(y_1+y_2)^2-(y_1-y_2)^2}{4}\right] + Q_2(y_3;\dots;y_k) = \frac{a_{12}}{4}(y_1+y_2)^2 - \dots$$

$$- \frac{a_{12}}{4}(y_1-y_2)^2 + Q_2(y_3;\dots;y_k) \Rightarrow \text{considero:}$$

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 \\ z_2 = y_1 - y_2 \\ z_3 = y_3 \\ \vdots \\ z_k = y_k \end{cases} \Rightarrow Q(Z) = \frac{a_{12}}{4} z_1^2 - \frac{a_{12}}{4} z_2^2 \dots Q_2(z_3;\dots;z_k)$$

per ipotesi induttiva $Q_2(z_3;\dots;z_k)$ si può ridurre a somma di quadrati di variabili $\Rightarrow$ in nuove variabili $(u_1;\dots;u_k)$:

$$Q\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} = \frac{a_{12}}{4} u_1^2 - \frac{a_{12}}{4} u_2^2 + \sum_{j=3}^{k} \alpha_j u_j^2$$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ (1):

$$Q(x_1;x_2;x_3) = x_1 x_2 + x_2 \underbrace{(-x_3)}_{\leftarrow x_2} = (x_1 + (-x_3))\, x_2 \quad \text{cambio coordinate:}$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow Q\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_1 y_2 = \frac{(y_1+y_2)^2-(y_1-y_2)^2}{4} \Rightarrow$$

cambio le coordinate: $\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 \\ z_2 = y_1 - y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \frac{z_1^2}{4} - \frac{z_2^2}{4}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ la mia matrice sarà:
ASSOCIATA A Q NELLA BASE FINALE

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Q(x) \text{ È degenere, con segnatura } (1;1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ È LA FORMA CANONICA DELLA MATRICE ASSOCIATA A Q

Il cambiamento di variabile effettuato è dato dalla composizione di quelli trovati, ed è:

(cambiamento totale di coordinate) $\Rightarrow \begin{cases} z_1 = x_1 - x_3 + x_2 \\ z_2 = x_1 - x_3 - x_2 \\ z_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Cerco A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{R_1 - R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{R_3 + R_1 \to R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{2R_1 - R_2 \to R_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{:2 \to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora la base "finale" è $\mathcal{B}_\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è F_Q-ortogonale!

La matrice $[Q]_B$ con $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma quadratica, è simmetrica reale: sappiamo che tali matrici sono sempre "congruenti" ad una matrice diagonale.

Ma $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ può essere pensata come associata ad un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (Tali applicazioni saranno operatori simmetrici)

Se A è diagonalizzabile $\Rightarrow$ sappiamo che $\exists\, D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonale e $S \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertibile $\mid$ $D = S^{-1} A S$ (ossia, A è <u>simile</u> a D).

Cerco in effetti una matrice D <u>congruente</u> ad A cioè $\boxed{D = S^T A S}$ con S invertibile.

Se trovo una matrice $S \mid S^T = S^{-1}$ $\Rightarrow$ tramite tali matrici S, D diventa sia congruente sia simile ad A.

Allora per determinare D congruente ad A, con tali S posso diagonalizzare A!

<u>Definizione</u>: Una matrice $S \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è detta <u>ORTOGONALE</u> se:

$$\boxed{S S^T = S^T S = I} \quad \Rightarrow$$

POICHÉ $SS^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 = a_{11} = R_1(S) \cdot C(S^T) = R_1(S) \cdot R_1(S)$

$$0 = a_{12} = R_1(S) \cdot C_2(S^T) = R_1(S) \cdot R_2(S)$$

$$\vdots$$

$$1 = a_{22} = R_2(S) \cdot C_2(S^T) = R_2(S) \cdot R_2(S)$$

I vettori riga e colonna della mia matrice S sono vettori ortonormali rispetto al prodotto scalare di $\mathbb{R}^n$.

Quindi IN QUESTO CASO, la base cercata rispetto alla quale la forma quadratica è in forma canonica è formata da vettori ortonormali (rispetto al prodotto scalare).

$\boxed{\text{ESEMPIO (II)}}$ (RIFERENDOCI ALL'ESEMPIO PRECEDENTE (I), MOSTRIAMO CHE I VETTORI DELLA BASE TROVATA SONO F_Q - ORTOGONALI

$$Q(X) = x_1x_2 - x_2x_3 \Rightarrow F((X;Y)) = \frac{Q(X+Y) - Q(X) - Q(Y)}{2} =$$

$$= \frac{(x_1+y_1)(x_2+y_2) - (x_2+y_2)(x_3+y_3) - \cancel{x_1x_2} + \cancel{x_2x_3} - \cancel{y_1y_2} + \cancel{y_2y_3}}{2} + \cancel{x_1x_2} - \cancel{x_2x_3} + \dots$$

$$\frac{+\cancel{y_1y_2} - \cancel{y_2y_3}}{2} \Rightarrow F_Q(X;Y) = \frac{x_1y_2}{2} + \frac{y_1x_2}{2} - \frac{y_2x_3}{2} - \frac{x_2y_3}{2}$$

$$F_Q(v_1;v_3) = F_Q\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

. E COSÌ VIA ...

ESERCIZIO: MOSTRARE CHE NON SONO ORTOGONALI RELATIVAMENTE AL PRODOTTO SCALARE DI $\mathbb{R}^3$.

Definizione: Si dice PRODOTTO SCALARE una forma bilineare reale simmetrica definita positiva.

ESEMPIO (III):

(I) $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Considero $\mathcal{C}$ in $\mathbb{R}^2$ (base canonica) $\Rightarrow [F]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F(X;Y) = F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) =$

$= X^T [F]_{\mathcal{C}} Y = (x_1; x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

QUESTA FORMA BILINEARE È (anche detta prodotto scalare standard)

(II) $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$$

Dimostrare che è un prodotto scalare.

(III) Sia $V = \{ f : [a;b] \to \mathbb{R} \ ; \ f \text{ continua} \} \Rightarrow f$ è integrabile $\Rightarrow$

$\quad\ \ \mathcal{C}^0[a;b]$

$\Rightarrow$ sia $F: \mathcal{C}^0_{[a;b]} \times \mathcal{C}^0_{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(f; g) \longmapsto \int_a^b f(x) g(x)\, dx$$

$\Rightarrow$

Dimostrare che F è forma bilineare reale simmetrica definita positiva.

Definizione: Si dice SPAZIO EUCLIDEO uno spazio vettoriale reale in cui è definito un prodotto scalare.