09/11/16

Siano A, B matrici in $\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ equivalenti; ci domandiamo se gli spazi riga delle due matrici sono diversi.

DETTI $R_i(A)$ I VETTORI RIGA DI A,

lo spazio riga di $A \doteq \ll R_1(A), R_2(A), \dots, R_p(A) \Rightarrow$

facciamo variare la riga j-esima di A mediante operazioni elementari, ad esempio formiamo $R_j(B)$ come $\alpha R_j(A)$, $\alpha \in \mathbb{R}-\{0\} \Rightarrow$ lo spazio $\ll R_1(B), R_2(B), \dots R_j(B), \dots, R_p(B) \gg = \ll R_1(A), \dots R_j(A), \dots R_p(A) \gg$

perché $\ll R_1(B), \dots, R_p(B) \gg \subseteq \ll R_1(A), \dots R_p(A) \gg$

in quanto $R_j(B) \in$ spazio riga di A poiché $R_j(B) = \alpha R_j(A) \in$ spazio riga di A, e i RESTANTI vettori riga non sono cambiati. Viceversa spazio riga $A \subseteq$ spazio riga B. Ogni vettore riga di A coincide con il corrispondente vettore riga di B, tranne il j-esimo, $R_j(A)$: $R_j(A) \in$ spazio riga di B? Sì perché $R_j(A) = \frac{1}{\alpha} R_j(B) \in$ spazio riga di B.

ANALIZZIAMO ORA UN'ALTRA OPERAZIONE ELEMETARE RIGA:

Sostituiamo $R_j(A)$ con $R_j(B) = \alpha R_j(A) + \beta R_k(A)$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\} \Longrightarrow$ Spazio riga A = Spazio riga di B?

1) $\langle\langle R_1(B), \dots, R_j(B), \dots R_p(B) \rangle\rangle \subseteq \langle\langle R_1(A), \dots, R_j(A),$
$\dots, R_p(A) \rangle\rangle$ $\overbrace{:}^{\text{INFATTI}}$ $R_j(B)$ è combinazione lineare di vettori di Spazio riga di A e $R_k(B) = R_k(A)$ $\forall k \neq j$.

2) $\langle\langle R_1(A), \dots, R_j(A), \dots, R_p(A) \rangle\rangle \subseteq \langle\langle R_1(B), \dots,$
$R_j(B), \dots, R_p(B) \rangle\rangle$ $\overbrace{:}^{\text{INFATTI}}$ $R_j(A)$ è combinazione lineare di vettori di Spazio riga di B:

$R_j(A) = \frac{1}{\alpha} R_j(B) - \frac{\beta}{\alpha} R_k(B)$ e $R_k(A) = R_k(B)$ $\forall k \neq j$.

c.v.d

SPAZIO COLONNA: varia per equivalenza di matrici?

Esempio

$$A \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 5/4 \\ 0 & 1 & 5/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Spazio colonne di $A = \ll \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 17 \\ 3 \end{pmatrix} \gg \subset \mathbb{R}^4$,

ha dimensione 2, PERCHE' IL RANGO DI A E' 2.

Spazio colonne di $B = \ll \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \gg$ ha dimensione 2

QUINDI, ENTRAMBI SONO PIANI IN $\mathbb{R}^4$, MA SONO PIANI DIVERSI:

INFATTI considero $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 4 \\ 10 = 0 \\ 1 = 1 \end{cases}$ $\nexists$ soluzione

PERCIO' $(0,4,10,1)$ NON APPARTIENE AL PIANO GENERATO DALLE COLONNE DI B.

CONSIDERO $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 5/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = -1/2 \\ \beta = 5/2 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$ IL VETTORE $C_3(B)$

E' COMBINAZIONE LINEARE DI $C_1(B)$ e $C_2(B)$.

$$C_3(B) = -\frac{1}{2} C_1(B) + \frac{5}{2} C_2(B) \Longrightarrow \underbrace{C_3(A) = -\frac{1}{2} C_1(A) + \frac{5}{2} C_2(A)}_{\text{SI PUO' VERIFICARE CHE}}$$

ABBIAMO LA SEGUENTE

Proposizione: Se le colonne $C_i(B)$ e $C_j(B)$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow C_i(A)$ e $C_j(A)$ sono linearmente indipendenti (E VICEVERSA)

Dimostrazione: Sia data la combinazione lineare $\alpha_i C_i(A) + \alpha_j C_j(A) = 0$; cerchiamo α_j e α_i per vedere se $\alpha_i = \alpha_j = 0$;

Considero $0C_1(A)+0C_2(A)+\dots+\alpha_i C_i(A)+$

$0C_{i+1}(A)+\dots 0C_{j-1}(A)+\alpha_j C_j(A)+\dots+0C_n(A)=0$

POSSIAMO RISCRIVERE TALE COMBINAZIONE NEL MODO SEGUENTE $A\cdot\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \alpha_i\\ 0\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\Longrightarrow$ il VETTORE $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \alpha_i\\ 0\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ è soluzione DEL SISTEMA $A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0$

$\Longrightarrow$ È ANCHE SOLUZIONE DEL SISTEMA EQUIVALENTE $B\cdot X=0$

cioè $0C_1(B)+0C_2(B)+\dots+\alpha_i C_i(B)+\dots+\alpha_j C_j(B)+$

$0C_{j+1}(B)+\dots+0C_n(B)=0$ cioè

$\alpha_i C_i(B)+\alpha_j C_j(B)=0 \Longrightarrow$ essendo $C_i(B)$ e $C_j(B)$

linearmente indipendenti $\Rightarrow \alpha_i=\alpha_j=0 \Rightarrow$

$C_i(A)$ e $C_j(A)$ sono lin. indipendenti. C.V.D.

__Proposizione__: Se una colonna di B è combinazione lineare di altre colonne di $B \Longrightarrow$ l'analoga colonna di A è combinazione lineare delle stesse colonne di A con gli stessi coefficienti cioè se $C_j(B)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i C_i(B)$

$\Longrightarrow C_j(A)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i C_i(A)$

(SI DIMOSTRA IN MANIERA ANALOGA ALLA PROPOSIZIONE PRECEDENTE)

Applicazioni pratiche:

Sia dato un insieme di vettori $v_1 \dots v_k$ in uno spazio vettoriale n-dimensionale. Cerco una base dello spazio n-dimensionale che contengono i vettori v_j linearmente indipendenti TRA QUELLI DATI

Esempio: $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Voglio una base di R^4 che contenga i vettori lin. indipendenti tra V_1, V_2, V_3. Formo la base di $\mathbb{R}^4$, 1) MODO: SETACCIANDO I VETTORI

$B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ in questo modo: prendo $u_1 = V_1$, $u_2 = V_2$ perché lin indipendenti, VEDO SE V_3 È LIN. INDIPEND. CERCANDO IL RANGO DI:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}_{4 \times 3}$$

IL RANGO È 2! QUINDI SCARTO V_3

Prendo A CASO $V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$: IL RANGO DI QUESTA MATRICE È 3 QUINDI AGGIUNGO V_4 A V_1 e V_2 PER FORMARE LA BASE CHE CERCO; MANCA UN VETTORE SEMPRE A CASO PRENDO V_5 E VALUTO SE È LIN. INDIPENDENTE DA V_1, V_2, V_4

Prendo $v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A$: CERCO IL RANGO, AD ES. CALCOLANDONE IL DETERMINANTE

$$\mathrm{Det}(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1-3-(-3-0-6) = 1-3+6 = 4 \neq 0 \Rightarrow$$

$rg(A) = 4$ e Base cercata è $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$.

Oppure possiamo agire in questo modo 2) MODO:

formo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 7} \quad \begin{matrix} 2R_1 - R_2 \to R_2 \\ 3R_1 - R_3 \to R_3 \\ 4R_1 - R_4 \to R_4 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 + R_3 \\ R_2 + R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} 5R_4 - 6R_3 \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & -5 \end{pmatrix} \qquad B_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Colonne linearmente indipendenti nella matrice finale ma anche in quella INIZIALE

LE COLONNE CHE OCCUPANO LE POSIZIONI 1, 2, 4, 5, SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI E QUINDI HO TROVATO LA BASE CERCATA!