Rango di una matrice: sia $A \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$ e considero le righe di tale matrice come coordinate di vettori in uno spazio n-dimensionale, essi sono chiamati "VETTORI RIGA" $\Rightarrow$ PROPOSIZIONE: I p vettori riga di A sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$ i minori di ordine p di A sono tutti nulli. (Si suppone $p \leq n$.)

DIMOSTRAZIONE: "$\Rightarrow$" prendere per ipotesi che i vettori siano linearmente dipendenti. Se $R_1, \ldots, R_p$ righe di A sono linearmente dipendenti $\Rightarrow \exists\, J \in \{1, \ldots, p\} \mid R_J$ è combinazione lineare dei rimanenti vettori riga cioè

$$R_J = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \ldots + \alpha_{J-1} R_{J-1} + \alpha_{J+1} R_{J+1} + \ldots + \alpha_p R_p$$

$\Rightarrow$ nella matrice A, quindi, la J-esima riga è combinazione lineare delle rimanenti e quindi ogni sottomatrice $p \times p$ ha determinante nullo. PERCHÈ LA SUA J-ESIMA RIGA È COMBINAZIONE LINEARE DELLE RIMANENTI.
Il viceversa è analogo, visto andando "indietro". NELLA DIMOSTRAZIONE.

c.v.d.

Come immediato corollario abbiamo che "il rango di una matrice A corrisponde al numero massimo di vettori riga di A linearmente indipendenti." È detto "RANGO ... RIGA" di A.

Stesso ragionamento per i vettori colonna, ~~se gli n vettori colonna~~ Analogamente a quanto dimostrato per i vettori riga di una matrice A, si può dimostrare che: supposto $p \geq n$, gli n vettori colonna di $A \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$ sono linearmente dipendenti $\Longleftrightarrow$ tutti i minori di ordine n di A sono nulli.

~~RANGOCPE~~ Come fatto per le righe definiamo il "rango COLONNA" di A come il numero massimo di vettori colonna linearmente indipendenti: si dimostra che il rango colonna di A coincide con il rango della matrice A. Quindi il rango colonna è uguale al rango riga ed entrambi sono uguali al rango della matrice A..

Quindi abbiamo 4 modi per determinare il rango di A.

Sottospazi vettoriali legati ad una matrice $A \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$

1) Considero il sistema $\underset{p\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{x} = \underset{\text{vettore nullo nello spazio } p\times 1}{0_{p\times 1}}$ con

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ sistema lineare omogeneo Σ_0 associato ad A. Lo spazio delle soluzioni di Σ_0, $Sol\,\Sigma_0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ (devu sempre passare per l'origine) ~~infatti~~ di dimensione $n - rg A$. Il sistema fornisce ~~il~~ l'equazione del sottospazio vettoriale.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_0 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ da cui}$$

equazione cartesiana

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Il $Sol\,\Sigma_0 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$ ha dimensione $3-2=1$

sono uguali: $\Rightarrow rg A = 2$ (riga) $= rg A = 2$ (colonne).

Il sistema di una retta passante per l'origine in $\mathbb{R}^3$.

Come trovo la base di questo sottospazio vettoriale? Una base di $Sol\,\Sigma_0$ è fornita dalle soluzioni fondamentali del sistema: nell'esempio

3 variabili: $\left.\begin{array}{l}1 \text{ libera}\\ 2 \text{ legate}\end{array}\right\}$ perché il rg $A = 2$

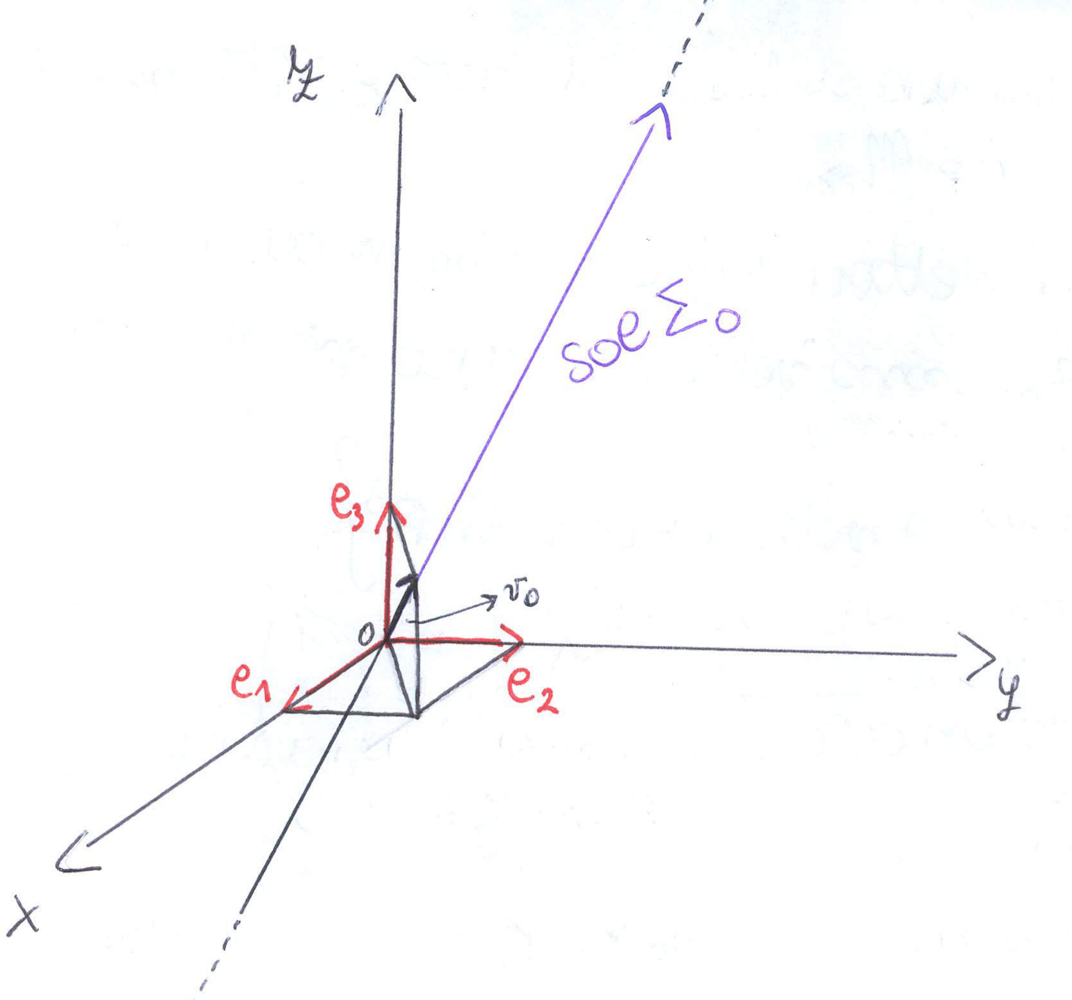
Individuo la variabile libera, CHE SARÀ IL parametro di Σ_0: x_3 è il parametro, 1 sola sol fondamentale, un vettore di base; do a x_3 il valore 1:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3
1	1	1

Quindi $B_{retta} = \left\{ \underset{\substack{\shortparallel \\ v_0}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$

La scelta del parametro è nostra!



Variabile libera come parametro: ⇒

EQUAZIONE PARAMETRICA:

$$\begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = s \\ x_3 = s \end{cases}$$

EQUAZIONE VETTORIALE: qualunque vettore della mia retta si scrive come combinazione lineare dei vettori di base.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ogni vettore si scrive come multiplo del vettore di base.

Si possono scrivere tutte le tre equazioni per qualunque spazio.

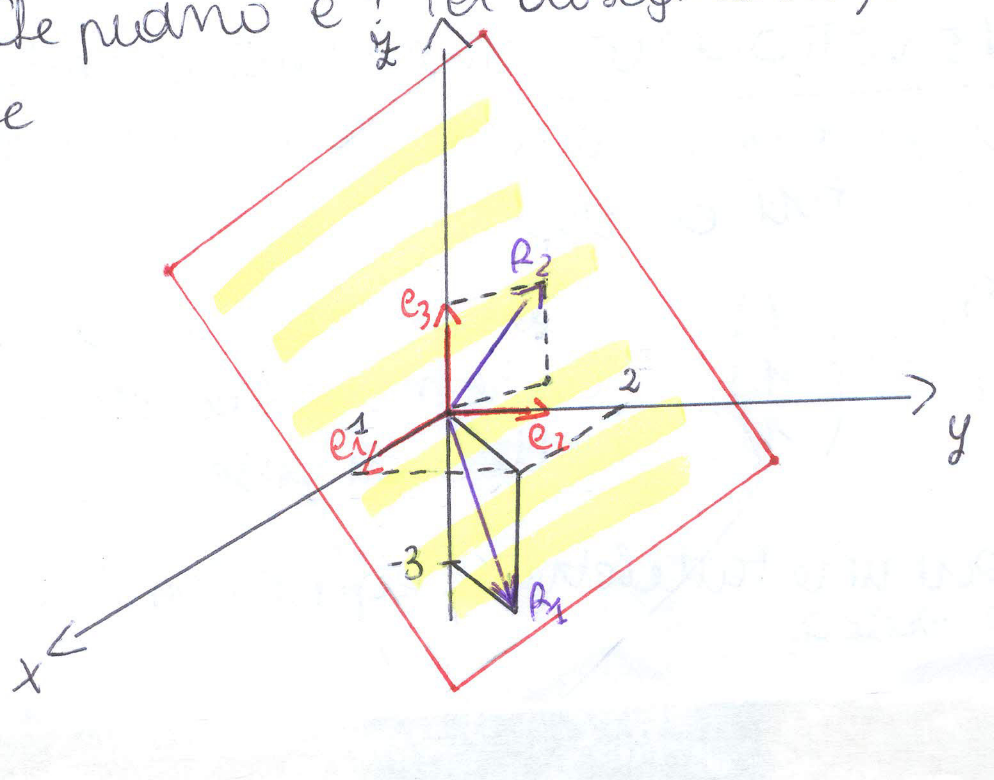
Posso associare un altro sottospazio vettoriale (6)
ad es. ALLA MATRICE $A \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$

2) Considero i vettori riga della matrice A.
$R_1, R_2, \dots, R_p$: sono vettori di uno spazio $\mathbb{R}^n$ n-dimensionale.

ESEMPIO:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$ 2 vettori riga in $\mathbb{R}^3$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Essi generano il sottospazio $\langle\langle R_1, R_2, \dots, R_p \rangle\rangle \subseteq \mathbb{R}^n$.
Esso ha dimensione (considero quanti vettori sono linearmente dipendenti? Tanti quanto il rg A) pari al rg A. ed è detto SPAZIO RIGA di A. È un piano in $\mathbb{R}^3$ NELL'ESEMPIO, formato da R_1 e R_2 linearmente indipendenti. DATO ~~[illegible]~~ $\langle\langle R_1, R_2 \rangle\rangle$ è un piano in $\mathbb{R}^3$. Che piano è? Per disegnarlo, abbiamo la base



Un qualunque vettore del piano può essere scritto come combinazione lineare dei due vettori di base. ⇒ ABBIAMO QUINDI LA SUA (7)

Eq. VETTORIALE:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 2s \\ -3s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-t \\ 2s \\ -3s+t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = s-t \\ x_2 = 2s \\ x_3 = -3s+t \end{cases}$$ eq. PARAMETRICA

RISOLVENDO IL SISTEMA IN s e t TROVIAMO LA SUA:

Eq. CARTESIANA:

dal sistema $\begin{cases} s = \frac{x_2}{2} \\ t = x_1 + \frac{x_2}{2} \\ x_3 = -\frac{3}{2}x_2 - x_1 + \frac{x_2}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 + x_2 + x_3 = 0}$ è LA SUA

EQUAZIONE CARTESIANA

⟹

3) Considero i vettori colonna della matrice A: $C_1, C_2, \dots, C_n$ sono vettori di uno spazio p-dimensionale (ho 3 vettori colonna in $\mathbb{R}^2$ nella matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ DELL'ESEMPIO) generato dai vettori colonna $\langle\langle C_1, C_2, \dots C_n \rangle\rangle$ $\subseteq \mathbb{R}^p$ di dimensione pari a rg A. (il rg A è 2 quindi lo spazio colonna è un sottospazio vettoriale (DIMENSIONE 2) di $\mathbb{R}^2$ e quindi è tutto $\mathbb{R}^2$)

è detto

SPAZIO COLONNA di A

Lo spazio riga non cambia (PER EQUIVALENZA), lo spazio colonna cambia tutto ~~per~~ a causa delle operazioni elementari riga. La dimensione rimane uguale perché il rg non cambia.