Geometria 08/05 1.

1) Ortogonalizzare la base $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^3$, con il metodo di G-S.

↓ significa cercare vettori ortogonali che mi diano gli stessi sottospazi in $\mathbb{R}^3$.

2) Dare una base ortonormale ($\perp u$) del sottospazio π_0: $x + y + z = 0$ di $\mathbb{R}^3$

3) Dare la proiezione ortogonale del vettore $v = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ su π_0.

1) Detti v_1, v_2, v_3 i vettori di B => dobbiamo dare i vettori w_1, w_2, w_3 ortogonali tra loro $\mid \langle\langle v_1 \rangle\rangle = \langle\langle w_1 \rangle\rangle$, $\langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle = \langle\langle w_1, w_2 \rangle\rangle$ e $\boxed{\langle\langle v_1, v_2, v_3 \rangle\rangle = \langle\langle w_1, w_2, w_3 \rangle\rangle}$.

⇓ ovvio perchè alla fine questo spazio coincide con tutto $\mathbb{R}^3$.

=> $w_1 = v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$w_2 = v_2 - 2v_1$ o $w_2 = v_2 - 2w_1$

perchè $v_1 \equiv$ con il sottospazio generato da w_1.

$$\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\|(1,1,1)\|^2} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} - \frac{5}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\-5/3\\4/3\end{pmatrix}$$

Abbiamo trovato w_2 che è vettore ortogonale a w_1.

Infatti $w_1 \cdot w_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1/3\\-5/3\\4/3\end{pmatrix} = 0$.

$$w_3 = v_3 - (\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\|(1,1,1)\|^2} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1/3\\-5/3\\4/3\end{pmatrix}}{\|(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3})\|^2} \begin{pmatrix}1/3\\-5/3\\4/3\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{4}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{3}{21}\begin{pmatrix}1/3\\-5/3\\4/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}34/21\\-2/21\\-32/21\end{pmatrix}$$

Poi si fa la prova per verificare che i vettori sono ortogonali tra loro.

2) Sia $u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} \in \pi_0$. Mi serve un altro vettore (u_2) ortogonale a u_1 ($u_2 \perp u_1$) e $u_2 \in \pi_0$ => do un vettore generico di π_0 $\begin{pmatrix}x\\y\\-x-y\end{pmatrix}$ => $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\-x-y\end{pmatrix} = 0$ =>

=> $x + 2y + 3x + 3y = 0 \Rightarrow 4x + 5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{5}x$

impongo che il prodotto scalare mi dia zero, così sono ortogonali.

Ho una retta intera di vettori ortogonali al vettore u_1 scelto.

↓ contenuti in π_0.

Pongo $x = 5$

=> $u_2 = \begin{pmatrix}5\\-4\\-1\end{pmatrix}$ è contenuto nel sottospazio π_0.

Cerco una base ortonormale quindi devo normalizzare. Trovo la norma e divido il vettore per quest'ultima.

$\|u_2\| = \sqrt{25+16+1} = \sqrt{42}$

$\|u_1\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

La base ortonormale cercata sarà: $\left\{ \overset{\hat{u}_1}{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{14} \end{pmatrix}}, \overset{\hat{u}_2}{\begin{pmatrix} 5/\sqrt{42} \\ -4/\sqrt{42} \\ -1/\sqrt{42} \end{pmatrix}} \right\}$. Sono stati normalizzati quindi sono dei versori.

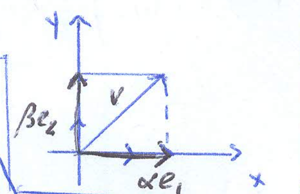
3) Dati v e π_0 la proiezione ortogonale di v su π_0 si cerca considerando la scomposizione di v come $g+h$, quindi $v = g+h$ con $g \in \pi_0$ e $h \in \pi_0^{\perp}$ $\Rightarrow$ cerchiamo g.

$h = v - g = v - a_1 v_1 - a_2 v_2$ con $B_{\pi_0} = \{v_1, v_2\}$ $\Rightarrow \begin{cases} h \cdot v_1 = 0 \Rightarrow \\ h \cdot v_2 = 0 \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} v \cdot v_1 = a_1 (v_1 \cdot v_1) + a_2 (v_2 \cdot v_1) = 0 \\ v \cdot v_2 = a_1 \underset{0}{(v_1 \cdot v_2)} + a_2 \underset{1}{(v_2 \cdot v_2)} \end{cases}$

h è complemento ortogonale contenuto in questo sottospazio.

Se $v_1 = \hat{u}_1$ e $v_2 = \hat{u}_2$ del punto 2) $\Rightarrow \begin{cases} v \cdot \hat{u}_1 = a_1 = -4/\sqrt{14} \\ v \cdot \hat{u}_2 = a_2 = 8/\sqrt{42} \end{cases}$

NB Se lavoro con una base ortonormale in uno spazio euclideo, le coordinate del vettore sono le proiezioni sugli assi generati dai vettori di base, ed è dato dal prodotto scalare di v per i versori di base.



$\Rightarrow g = \underbrace{-\frac{4}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{14} \end{pmatrix} + \frac{8}{\sqrt{42}}}_{\text{coordinate del vettore nel piano}} \begin{pmatrix} 5/\sqrt{42} \\ -4/\sqrt{42} \\ -1/\sqrt{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Dati k vettori in uno spazio euclideo n-dimensionale, considero la matrice

$$\begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & v_1 \cdot v_3 & \dots & v_1 \cdot v_k \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & v_2 \cdot v_3 & \dots & v_2 \cdot v_k \\ \vdots \\ v_k \cdot v_1 & v_k \cdot v_2 & v_k \cdot v_3 & \dots & v_k \cdot v_k \end{pmatrix} \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$$

Matrice di Gram di vettori $v_1, \dots, v_k$.

Il suo determinante è detto GRAMIANO dei vettori $v_1, \dots, v_k$; è $\neq 0$ se SONO LIN. INDIPENDENTI

Se sono ortonormali il determinante è 1, IL RANGO E' MAX.

SE SONO i vettori ORTOGONALI, IL RANGO E' MAX, IL DETERMINANTE E' $\neq 0$ POICHÉ IL PRODOTTO SCALARE E' DEFINITO POSITIVO $\Rightarrow$ NON CI SONO VETTORI ISOTOPI. SE I VETTORI SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SONO GENERATORI DI UNO SPAZIO K-DIMENSIONALE, CIOÈ SONO BASE DELLO SPAZIO VETTORIALE K-DIMENSIONALE $\Rightarrow$ ⓞ

ⓞ $\rightarrow$ LA MATRICE E' ASSOCIATA AL PRODOTTO SCALARE SU TALE SOTTOSPAZIO E POICHÉ IL PRODOTTO SCALARE E' UNA FORMA BILINEARE DEFINITA POSITIVA PER IL TEOREMA DI IACOBY I SUOI MINORI DI NORD OVEST SONO POSITIVI ED IL DETERMINANTE E' UNO DI TALI MINORI

SE I VETTORI SONO ORTOGONALI $\Rightarrow$

$$G(v_1, \dots, v_k) = \|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 \cdot \|v_3\|^2 \cdot \dots \cdot \|v_k\|^2$$

8.

- se i vettori non sono ortogonali $\Rightarrow G(v_1, \dots, v_k) < \|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 \cdot \dots \cdot \|v_k\|^2$

Supponiamo siano $v_1, \dots, v_k$ vettori l. indipendenti di $\mathbb{R}^n$, $\Rightarrow$ essi possono essere pensati come lati di un parallelepipedo P k-dimensionale in $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ Volume $(P) = \sqrt{G(v_1, \dots v_k)}$