(1) 1/12/2010

Relazione di similitudine tra matrici quadrate in $M_{m\times m}$:

$A \sim_S B \iff \exists\ S \in M_{m\times m}$ invertibile t.c. $B = S^{-1}AS$

1°) Invariante di similitudine: determinante: $|A| = |B|$ se $A \sim_S B$?

Sappiamo che $B = S^{-1}AS \Rightarrow |B| = |S^{-1}AS|$

$$= |S|^{-1}\cdot|A|\cdot|S| = |A|\underbrace{|S|^{-1}|S|}_{1} = |A|$$

Vale il viceversa?

Si dà un esempio numerico.

· Si sceglie (AD ESEMPIO) la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ con $|A| = -2$, e la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ con $|B| = -2$.

$\Rightarrow \exists\ S = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ t.c. $B = S^{-1}AS \Rightarrow \boxed{SB = AS} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2x & x-y \\ 2z & z-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -z & t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2x \\ x-y = 2y \\ 2z = -z \\ z-t = -t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & x/3 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

PROVIAMO CON UN ALTRO ESEMPIO:

· Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \exists\ S = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ t.c. $B = S^{-1}AS \Rightarrow \boxed{SB = AS}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ x+y = y \\ z = z \\ z+t = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = y \\ t = t \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix} = S$$

$\forall y, t \in \mathbb{R}$ S non è invertibile!

TALE CONTROESEMPIO CI DICE CHE: In generale il viceversa NON vale!

2°) Invariante di similitudine: rango della matrice, perché esso dà la dimensione dell'Immagine dell'operatore ad esso associato E TALE DIMENSIONE NON DIPENDE DALLE BASI SCELTE.

DEFINIZIONE

Una matrice $A \in M_{m\times m}$ è detta DIAGONALIZZABILE se è simile ad una matrice diagonale D, cioè se $\exists\ S$ invertibile t.c. $D = S^{-1}AS$

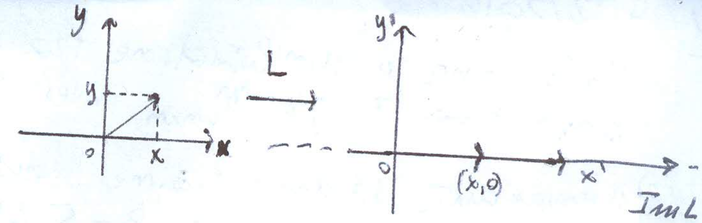
Sia $L: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ un'applicazione lineare sullo spazio vettoriale $\mathbb{V} \Rightarrow$ diamo la seguente definizione

DEFINIZIONE

Un sottospazio $W < \mathbb{V}$ è detto INVARIANTE per L se $L(W) \subseteq W$.

Esempio 1) Sia $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (x,0)$



$$[L]_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Im(L) è una retta in $\mathbb{R}^2$ con Base $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} x' = t \\ y' = 0 \end{cases}}_{\text{eq. parametrica}} \Rightarrow \underbrace{y' = 0}_{\text{eq. cartesiana}}$$

Non è iniettiva: $\dim \operatorname{Ker} L = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{Im}(L)$

$$1 = 2 - 1$$

Nucleo: asse y schiacciato nell'0.

$L(v) = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [L(v)]_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0$

OSSERVAZIONE:
Il vettore nullo forma sempre un sottospazio invariante $\forall L: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$
Anche tutto $\mathbb{V}$ è invariante $\forall L: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$. ESSI SONO SOTTOSPAZI INVARIANTI BANALI.

CERCO i
Sottospazi non banali invarianti PER $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y) \mapsto (x,0)$

- asse x: VIENE MANDATO su se stesso
- asse y ($x=0$) è schiacciato sull'0, contenuto su TALE ASSE E QUINDI $L(\text{ASSE } y) \subseteq \text{ASSE } y$ E PERCIÒ È INVARIANTE!

Retta di $\mathbb{R}^2$ per $(0,0)$ $\Rightarrow$ i vettori sono dati dalle coordinate $\begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix}$

$\Rightarrow L\begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix} \Leftrightarrow m = 0$: TRA LE RETTE $y = mx$ L'UNICA CHE È UN SOTTOSP. INVARIANTE È $\boxed{y=0}$.

Inoltre bisogna valutare $x = 0 \Rightarrow$ è invariante (↑)

IN GENERALE LA SUA EQUAZIONE È $y = mx$ (TRANNE CHE PER LA RETTA $x=0$) esclusa

$\rho: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Data una rotazione di angolo $\theta \in (0,\pi)$ in verso antiorario in $\mathbb{R}^2$, attorno all'0, dare la matrice ad essa associata nelle Basi canoniche

La matrice ha rango massimo $\Rightarrow$ LA ROTAZIONE È UN'APPLICAZIONE suriettiva e biettiva.

Non ci sono sottospazi invarianti non banali! (DA FARE)