COME DETERMINARE L'APPLICAZIONE LINEARE ASSOCIATA AD A COME ESPRESSIONE ANALITICA DI L

Considero una matrice $A \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ e fisso due basi $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^p}$ e $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ del codominio e dominio di un'applicazione lineare $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ associata ad A nelle basi date, cioè $A = [L]^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^p}}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}$

Cerco l'espressione analitica di L:

SO CHE DATO $v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow [L(v)]_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^p}} = A \cdot [v]_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}$ ma $[L(v)]$ non dà le cordinate dell'immagine di un generico vettore nella base $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^p}$, come richiesto!

Mi serve la matrice associata ad L nelle basi canoniche, $[L]^{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^p}}_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^n}}$ perché solo con questa riesco a dare la giusta espressione di L facendo

$$\boxed{[L(v)]_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^p}} = [L]^{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^p}}_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^n}} \cdot [v]_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^n}}}$$

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}) \xrightarrow{L \to A} (\mathbb{R}^p, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^p})$$

Questa scrittura insiemisticamente non ha molto significato ma chiarisce concettualmente cosa stiamo cercando, dato A come matrice incognita.

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n}) \xrightarrow{L \to A_e} (\mathbb{R}^p, \mathcal{E}_{\mathbb{R}^p})$$

Creiamo un diagramma commutativo di funzioni:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}) \arrow[rrr, "L \to A"] & & & (\mathbb{R}^p, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^p}) \arrow[ddd, "id_{\mathbb{R}^p}"] \\
& \tilde{v} \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & L(v) \arrow[d] & \\
& v \arrow[u] & L(v) & \\
(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n}) \arrow[uuu, "id_{\mathbb{R}^n}"] \arrow[rrr, "L \to A_e"] & & & (\mathbb{R}^p, \mathcal{E}_{\mathbb{R}^p}) \\
& v \arrow[rr] & & L(v)
\end{tikzcd}$$

Quindi avrò: $L = id_{\mathbb{R}^p} \circ L \circ id_{\mathbb{R}^n}$

$$A_e = [L]^{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^p}}_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^n}} = [id_{\mathbb{R}^p}]^{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^p}}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^p}} \cdot \underbrace{[L]^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^p}}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}}_{A} \cdot [id_{\mathbb{R}^n}]^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^n}}$$

Esercizio:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ cerco $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ associata ad A nelle basi $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "L"] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) \arrow[d, "id"] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[u, "id"] \arrow[r, "L"'] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_{\mathbb{R}^3})
\end{tikzcd}$$

quindi $[id_{\mathbb{R}^3}]^{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^3}}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left[id_{\mathbb{R}^2} \right]^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$id\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 - \alpha_2 = 0\\ 2\alpha_1 = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_2 = 1/2\\ \alpha_1 = 1/2\end{cases}$

$id\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \beta_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\beta_1 - \beta_2 = 1\\ 2\beta_1 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta_1 = 0\\ \beta_2 = -1\end{cases}$

MOLTIPLICO LE MATRICI TROVATE:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{3\times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3/2 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 3/2\, y \\ -x + 2y \\ -2x + y/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \left(-x + \frac{3y}{2}, -x+2y, -2x + \frac{y}{2}\right) \\ \text{È L'APPLICAZIONE CERCATA!} \end{array}}$$

Supponiamo di avere $\mathbb{R}^n \xrightarrow{L} \mathbb{R}^n$ lineare, e la stessa base nel dominio e nel codominio, $\mathcal{B}_1$; $L: (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_1) \xrightarrow{L} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_1)$

L in questo caso è detto <u>OPERATORE</u>

Cambio base nel dominio e nel codominio, $\mathcal{B}_2$, :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_1) & \xrightarrow{L} & (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_1) \\ {\scriptstyle id_1}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle id_2} \\ (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_2) & \xrightarrow{L} & (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_2) \end{array}$$

In questo caso particolare id_2 è l'inverso di id_1 (e viceversa)

$\Rightarrow$ le loro matrici sono una l'inversa dell'altra!

$\Rightarrow$ Se considero

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}) & \xrightarrow[{[L]_\mathcal{B} = A}]{L} & (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}) \\ {\scriptstyle S^{-1} = [id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle [id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = S} \\ (\mathbb{R}^n, \mathcal{E}) & \xrightarrow[{[L]_\mathcal{E} = B}]{} & (\mathbb{R}^n, \mathcal{E}) \end{array}$$

$\Rightarrow$ le matrici sono legate dalla relazione: $\boxed{B = S^{-1} A S}$

<u>Definizione</u>: Due matrici quadrate $A, B \in M_{n\times n}$ si dicono <u>SIMILI</u> se $\exists$ una matrice invertibile S tale che $B = S^{-1}AS$. PONIAMO $A \sim_S B$ PER INDICARE CHE A È SIMILE A B.

<u>Osservazioni</u>: La relazione di similitudine fra matrici di $M_{n\times n}$ è di equivalenza.

Dim:

1) riflessiva: A è simile ad A: $\exists$ S invertibile tale che $A = S^{-1}AS$? Sì <u>$S = I$</u>

2) simmetrica: Se A è simile a B, cioè $A \sim_S B$, $\Rightarrow$ $B \sim_S A$?

$\Downarrow$ $\exists S$ tale che $B = S^{-1}AS$

$\Downarrow$ $\exists T$ tale che $A = T^{-1}BT$? Sì, basta prendere $T = S^{-1}$

PAGINA 2

$$\Rightarrow SB = SS^{-1}AS \Rightarrow SB = AS \Rightarrow SBS^{-1} = ASS^{-1} = A \Rightarrow A = SBS^{-1}$$

3) transitiva: Se $A \sim_S B$ e $B \sim_S C \Rightarrow A \sim_S C$?

Ipotesi: $B = S^{-1}AS$ e $C = T^{-1}BT$

Cerco E tale che $C = E^{-1}AE$

$$\Rightarrow C = T^{-1}(S^{-1}AS)T = \underbrace{T^{-1}S^{-1}}_{=}AST$$

$$C = (ST)^{-1}A(ST) \Rightarrow E = ST$$

<u>Possiamo creare le classi di similitudine di matrici</u>

<u>Osservazione 1)</u>: Matrici associate allo stesso operatore in basi diverse sono <u>SIMILI</u>

<u>Osservazione 2)</u>: Ogni classe di similitudine di matrici rappresenta un operatore, cioè c'è corrispondenza biunivoca tra le classi di similitudine e gli operatori.