 06-03-17

Sia A un sottospazio affine di uno ~~sotto~~spazio vettoriale V

ANALIZZIAMO IL SUO COMPORTAMENTO RISPETTO ALLE COMBINAZIONI LINEARI:

$\Rightarrow$ Fissato $a \in A \Rightarrow A = a + W$, $W < V$; cioè $A = \{a + w \mid w \in W\}$

Siano $b_1, b_2 \in A \Rightarrow \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \in A \ \forall \beta_1, \beta_2 \in K$ (campo di riferimento)?

Sappiamo che $b_1 = a + w_1$, $b_2 = a + w_2$ con $w_1, w_2 \in W \Rightarrow \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 = \beta_1(a+w_1) + \beta_2(a+w_2) =$

$= \beta_1 a + \beta_1 w_1 + \beta_2 a + \beta_2 w_2 = (\beta_1 + \beta_2) a + \underbrace{(\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2)}_{\in W} \Rightarrow$

$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \in A \Leftrightarrow \boxed{\beta_1 + \beta_2 = 1}$

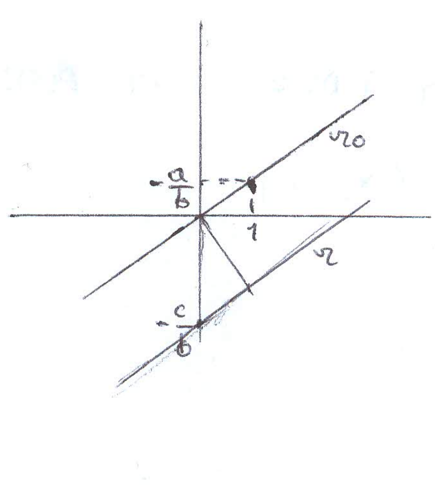
Retta nel piano ha equazione $ax + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

L'equazione parametrica della retta è $\Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = -\frac{a}{b}s - \frac{c}{b} \end{cases}$ DA CUI RICAVIAMO L'EQUAZIONE VETTORIALE:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{pmatrix}}_{\text{direzione}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c}{b} \end{pmatrix}}_{\text{traslazione}},$$

DEFINIZIONE:

① Diciamo <u>parametri direttori</u> di una retta r, le coordinate di un vettore della sua direzione. Essi sono definiti a meno di una costante moltiplicativa. QUINDI:



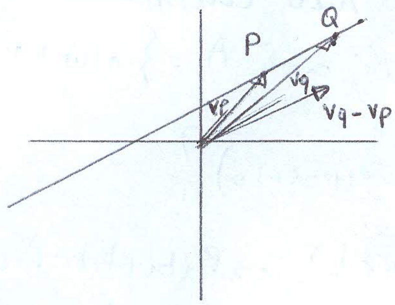
$r_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = -\frac{a}{b}s \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x$

$\Rightarrow ax + by = 0$

$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c}{b} \end{pmatrix} \Rightarrow$ vettore della traslazione

Facendo variare c, si hanno tutte le rette parallele ad $ax + by = 0$

Retta passante per due punti



$P(x_1, y_1) \quad Q(x_2, y_2)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = s(x_2 - x_1) + x_1 \\ y = s(y_2 - y_1) + y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ y = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1) + y_1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}} \quad \underline{\text{se}} \quad x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2$$

$$\frac{(y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1)}{(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)} = 0 \Rightarrow$$

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1) = 0$$

NOTIAMO CHE:

$$\begin{vmatrix} y - y_1 & x - x_1 \\ y_2 - y_1 & x_2 - x_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \underset{R_3 - R_2}{\overset{R_1 - R_2}{=}} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y - y_1 & x - x_1 \\ y_2 - y_1 & x_2 - x_1 \end{vmatrix} = 0$$

PERCIÒ L'EQUAZIONE DI UNA RETTA È DATA DA

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

SE SONO DATI I DUE SUOI PUNTI (x_0, y_0) E (x_1, y_1).

Definizione Date due rette r_1, r_2 nel piano si dice <u>Fascio di rette</u> l'insieme di tutte le rette del piano ottenute come combinazione lineare delle due rette date.

Posto $a_1x+b_1y+c_1=0$ e $a_2x+b_2y+c_2=0$ equazioni di r_1 ed r_2, l'equazione del fascio sarà $\lambda(a_1x+b_1y+c_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2)$, $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$

Se $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ ho soluzione unica, cioè $rg\, I = rg\, C = 2$

$\Rightarrow$ le due rette si intersecano in un punto P_0 ~~passante~~ e per P_0 passano tutte le rette del fascio

Questo è detto FASCIO PROPRIO di rette e P_0 è detto CENTRO DEL FASCIO.

Se $rg\, I = rg\, C = 1$ non c'è fascio PERCHÉ LE DUE RETTE COINCIDONO

Se $rg\, I = 1, rg\, C = 2$ la direzione delle due rette è la stessa

$\Rightarrow$ rette parallele $\Rightarrow$ il fascio è formato da tutte le rette parallele con direzione $a_1x+b_1y=0$. Esso è detto FASCIO IMPROPRIO

ESERCIZIO:

Dato il fascio di rette con centro $P(1,1)$, determinare la retta del fascio parallela alla retta avente direzione $x+2y=0$ e ~~avente~~ passante per $Q(2,3)$

1) Determino l'equazione del Fascio: cerco ~~tutte~~ due rette passanti per P $\quad ax+by+c=0 \Rightarrow a+b+c=0 \quad c=-a-b$

$$\begin{array}{c|c|c} c & a & b \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}$$

le due rette considerate sono $x-1=0 \quad y-1=0$ (AD ESEMPIO)

$\Rightarrow$ il Fascio ha equazione $\lambda(x-1)+\mu(y-1)=0$ suppongo $\lambda \neq 0$,
DIVIDO PER λ E PONGO
$\frac{\mu}{\lambda}=s \Rightarrow (x-1)+s(y-1)=0$

ATTENZIONE! $\rightarrow$ se prendiamo il SOLO parametro s perdiamo una delle equazioni: $(y-1)=0$

In questo caso stiamo cercando una retta di direzione $x+2y=0$

quindi possiamo prendere (L'EQUAZIONE DEL FASCIO CON) parametro s, POICHE' LA RETTA $y-1=0$ NON E' QUELLA RICHIESTA.

$x+sy-1-s=0 \Rightarrow$ ha direzione $x+2y=0$ SE $\boxed{s=2}$

$\Rightarrow$ la retta cercata è $\boxed{x+2y-3=0}$