Definizione: si dice matrice di K righe ed n colonne con entrate nel campo dato una tabella ordinata in K righe ed in colonne di scalari del campo.

Esempio: MATRICE di 3 righe e 4 colonne con entrate reali

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ p & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

In generale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \cancel{a_{41}} & \cancel{a_{42}} & \cancel{a_{43}} & \cancel{a_{44}} \end{pmatrix} \; 3 \times 4$$

indice di riga — indice di colonna

$M_{3\times4}(\mathbb{R}) = \{$matrici 3×4 ad entrate reali$\} \subset M(\mathbb{R})$ ← INSIEME DI TUTTE LE MATRICI

$M_{3\times3}(\mathbb{R}) = \{$matrici 3×3 ad entrate reali$\}$

Esempio: $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ diagonale principale, diagonale secondaria

matrici quadrate poiché ricordano un quadrato.

$M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è l'insieme delle matrici quadrate $n \times n$.

$M_{k\times n}$ è L'INSIEME DELLE MATRICI $k\times n$; SE $k \neq n$ LE MATRICI SI DICONO RETTANGOLARI

La diagonale principale (per matrici quadrate) è individuata nella matrice A dalle entrate a_{kk} $K = 1, \dots, n$.

Una matrice quadrata in cui $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$ è detta diagonale

Esempio: $D_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Una matrice quadrata è detta triangolare superiore ~~[illegible]~~

se $a_{ij} = 0 \ \forall i,j = 1, \dots, n$ con $i > j$

Esempio: $A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1/2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

nulli perché l'indice di riga è più grande di quello di colonna.

Una matrice quadrata è detta triangolare inferiore se

$a_{ij} = 0 \ \forall i,j = 1, \dots, n$ con $i < j$

Una matrice diagonale è:
- sia triangolare superiore
- sia triangolare inferiore

La matrice simmetrica

Definizione: si dice MATRICE SIMMETRICA una matrice quadrata tale che $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i,j = 1,\dots,n$

Esempio: $A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -8 \\ 3 & -8 & 5 \end{pmatrix}$

La matrice identità $n \times n$ è data in questo modo:

$$I_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

cioè è una matrice ~~...~~ con ~~diagonale~~ con tutte le entrate della diagonale pari a 1.

1 elemento neutro della moltiplicazione

0 elemento neutro dell'addizione.

In $M_{k\times n}(\mathbb{R})$ introduco l'operazione di somma:

Sia $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,n}}$ e $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,n}}$ => voglio definire ~~quest~~ $A \hat{+} B = ?$

in questo modo $A \hat{+} B = C$ con $C = (c_{ij})$ e $\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$ $\forall i,j$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = A \hat{+} B = ?$

⇓

non posso sommare con una matrice che ha n° colonne e/o righe diverso.

$A \hat{+} B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} = C$ ↳ una nuova matrice partendo da due.

$\hat{+} : M_{2\times 3} \times M_{2\times 3} \longrightarrow M_{2\times 3}$

$(A, B) \longrightarrow C = A \hat{+} B$

applicazione/operazione

⇓

nuova che sto definendo adesso.

(3) ~~Riepilogo~~

l'operazione $\hat{+}$ definita in $M_{K\times M}(\mathbb{R})$ è:

1. associativa? cioè date $A, B, C \in M_{K\times M}(\mathbb{R})$, $(A \hat{+} B) \hat{+} C = A \hat{+} (B \hat{+} C)$?
2. $\exists$ elemento neutro? la matrice nulla perché sono sempre zero
3. $\forall A \in M_{K\times M}(\mathbb{R})$, $\exists$ l'opposto?
4. commutativa?

Pongo $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$

quindi $A = (a_{ij})$, $B(b_{ij})$, $C(c_{ij}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow [(a_{ij}) \hat{+} (b_{ij})] \hat{+} (c_{ij}) = (a_{ij}) \hat{+} ((b_{ij}) \hat{+} (c_{ij}))$$

$$(a_{ij} + b_{ij}) \hat{+} (c_{ij}) \qquad (a_{ij}) \hat{+} (b_{ij} + c_{ij})$$

$$((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}) \qquad (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}))$$

Ho ottenuto due matrici

Le matrici sono uguali?

hanno bisogno delle stesse entrate nello stesso posto. e anche il numero di colonne e righe uguali.

Si sono uguali perché vale la proprietà associativa

~~perché~~ siamo in $\mathbb{R}$ (dove con l'addizione vale la proprietà associativa)

Dimostrare anche ~~il~~ i punti 2.3.4 x CASA

se valgono 1, 2, 3 la struttura algebrica data è detta GRUPPO

Se vale la proprietà commutativa è un gruppo abeliano

l'operazione di somma è binaria e interna.

In $M_{K\times M}(\mathbb{R})$ introduco l'operazione di MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE

Sia $A \in M_{K\times M}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,K \\ j=1,\dots,M}}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$ definisco

$$\alpha \hat{\cdot} A = (\alpha a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,K \\ j=1,\dots,M}}$$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ e $\alpha = 1/2 \Rightarrow \alpha A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 2 & 5/2 & 3 \end{pmatrix}$ se prendo $\beta = -4$

$$1/2(-4A) \overset{?}{=} (1/2(-4))A$$

④ PROPRIETÀ ASSOCIATIVITÀ: $\alpha \hat{\cdot} (\beta \hat{\cdot} A) = (\alpha\beta) \hat{\cdot} A$

Esempio: $\left(\frac{1}{2} \hat{\cdot} (-4 \hat{\cdot} A) \right) \overset{?}{=} (-2) \hat{\cdot} A$

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & -10 & -12 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hat{\cdot} \begin{pmatrix} -4 & -8 & -12 \\ -16 & -20 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & -10 & -12 \end{pmatrix}$$

x CASA

fare dimostrazione generica

PER LE DUE OPERAZIONI INTRODOTTE IN $\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times n}$ VALE LA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA:

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA: $\alpha \hat{\cdot} (A \hat{+} B) = \alpha \hat{\cdot} A \hat{+} \alpha \hat{\cdot} B$

e inoltre $(\alpha + \beta) \hat{\cdot} A = (\alpha \hat{\cdot} A) \hat{+} (\beta \hat{\cdot} A)$

↓

dimostrarle a casa.