03/05/2017

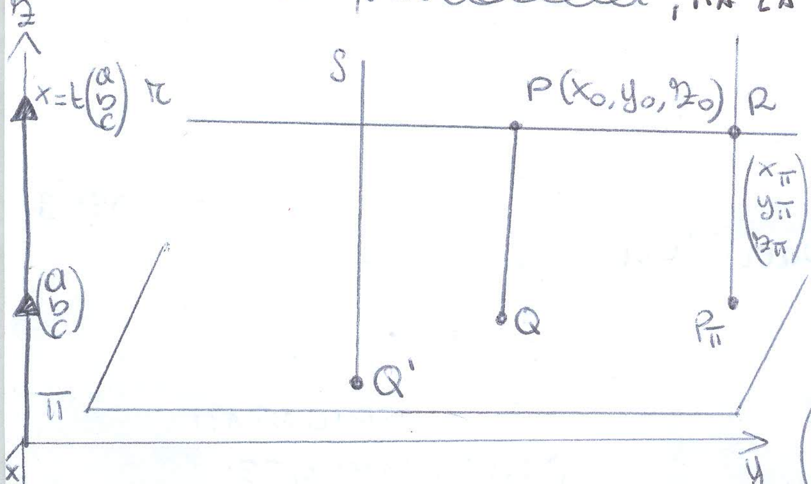
DISTANZA RETTA - PIANO: ($\mathbb{R}^3$)

Se si intersecano, la distanza è zero. $\rightarrow d(r,\pi) = 0$

Oppure sono paralleli

Se la retta giace sul piano $\rightarrow d(r,\pi) = 0$

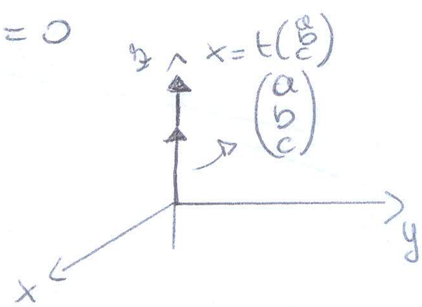
Se sono paralleli, MA LA RETTA NON GIACE SUL PIANO:



$d(r,\pi) = \overline{PQ}$

$ax + by + cz + d = 0$

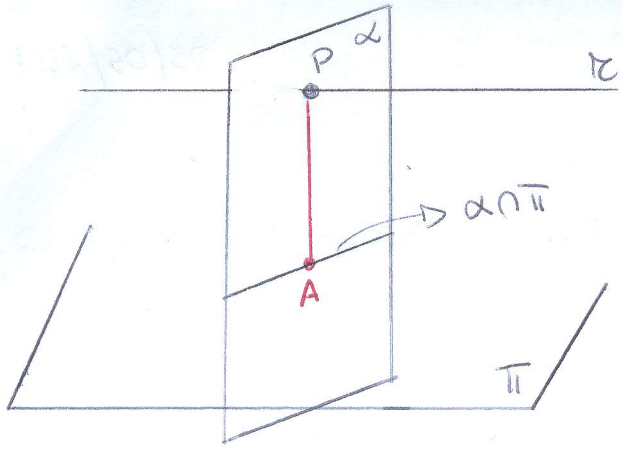
$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \pi \leftarrow x = t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$



lo traslo sul piano $\rightarrow x = t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + Q'$

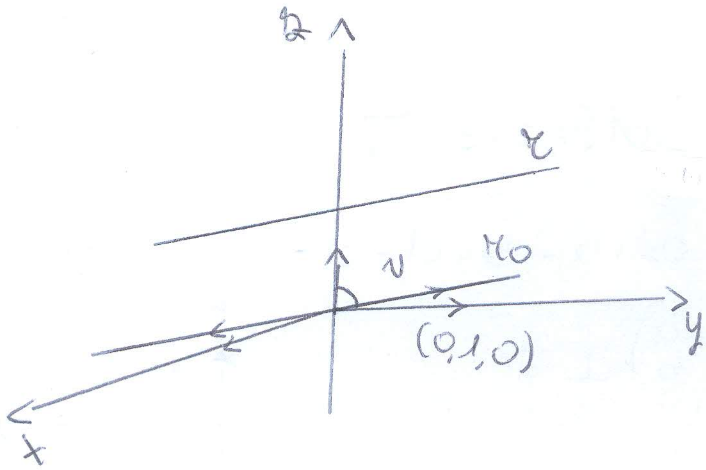
$$
\begin{cases}
S \quad x = t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_\pi \\ y_\pi \\ z_\pi \end{pmatrix} \\
r \quad x = s\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

Oppure si cerca un piano perpendicolare a π e poi faccio l'intersezione tra piano e retta partendo quindi dal piano e non dalla retta.



SI PUÒ CALCOLARE $\overline{PA}$, DISTANZA TRA P E $\alpha \cap \pi$ NEL PIANO α.

Coseni direttori:

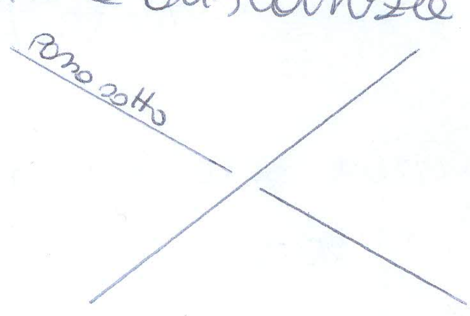


Trovo i 3 coseni DEI 3 ANGOLI che la retta forma con i 3 assi, ORIENTATI POSITIVAMENTE

Distanza tra due rette:

Incidenti: distanza uguale a zero.

Tra due sghembe: è la minima distanza tra due punti delle rette.

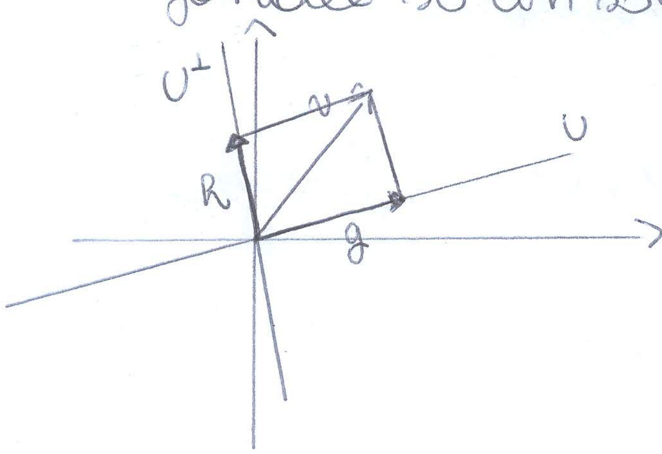


In uno spazio euclideo V, con $\dim V = n$, dato un sottospazio U, k-dimensionale, $\exists$ sempre un sottospazio $U^{\perp}$ di dimensione $n-k$ t.c. $U \oplus U^{\perp} = V$

esempio: $V = \mathbb{R}^3$ $\quad U = x+y+z=0 \Rightarrow U^{\perp} = ?$

$U^{\perp} = \langle\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle\rangle$: è la retta $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ y=z \end{cases}$

Dato un vettore $v \in V$ cerco la sua proiezione ortogonale su un sottospazio U dato:



scompongo v:
$v = y + h$ con
$y \in U$ ed $h \in U^{\perp} \Rightarrow$
$\Rightarrow y$ è la proiezione cercata.

In generale $V = \mathbb{R}^n$, $U = \langle\langle u_1, \dots, u_k \rangle\rangle$, fissato

$$B_{\mathbb{R}^n} = \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$$

Cerco $y \in U$ ed $h \in U^{\perp}$ t.c. $v = y + h \Rightarrow$

$\Rightarrow y$ è la proiezione ortogonale.

$$y = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j u_j \Rightarrow v = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j u_j + h \Rightarrow h = v - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j u_j$$

Impongo che $R \cdot u_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$ cioè

$$\left(v - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j u_j\right) \cdot u_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$$

$$\begin{cases} v \cdot u_1 - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (u_j \cdot u_1) = 0 \\ v \cdot u_2 - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (u_j \cdot u_2) = 0 \\ \vdots \\ v \cdot u_k - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (u_j \cdot u_k) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 (u_1 \cdot u_1) + \alpha_2 (u_2 \cdot u_1) + \dots + \alpha_k (u_k \cdot u_1) = v \cdot u_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 (u_1 \cdot u_k) + \alpha_2 (u_2 \cdot u_k) \dots + \alpha_k (u_k \cdot u_k) = v \cdot u_k \end{cases}$$

Sistema lineare non omogeneo di k eq. in k incognite.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & u_2 \cdot u_1 & \dots & u_k u_1 \\ \vdots & & & \\ & & & \\ u_1 u_k & u_2 \cdot u_k & \dots & u_k \cdot u_k \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cdot u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v \cdot u_k \end{pmatrix}$$

matrice associata al prodotto scalare associato ad una forma bilineare definita positiva, per Jacobi → deve avere tutti i minori di Nord-OVEST POSITIVI.

Quindi ha det > 0, quindi rg max. e si ha una sola soluzione.

Abbiamo trovato y!

Se la base è ortogonale, il sistema si riduce perché i prodotti scalari sono nulli, NEL SEGUENTE MODO:

$\Downarrow$

Se la base $B_u = \{u_1, \dots, u_k\}$ è ortogonale $\Rightarrow$

$\Rightarrow u_i \cdot u_j = 0 \quad \forall i \neq j \Rightarrow$ il sistema diventa:

$$\begin{cases} \alpha_1 u_1 \cdot u_1 = v \cdot u_1 \\ \alpha_2 u_2 \cdot u_2 = v \cdot u_2 \\ \vdots \\ \alpha_k u_k \cdot u_k = v \cdot u_k \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{v \cdot u_1}{\|u_1\|^2} \\ \alpha_2 = \dfrac{v \cdot u_2}{\|u_2\|^2} \\ \vdots \\ \alpha_k = \dfrac{v \cdot u_k}{\|u_k\|^2} \end{cases}$$

$\rightarrow$ coeff. di Fourier dati solo se la base è ortogonale.

Come trovo una base ortogonale? UN METODO È COSTRUIRLA PRENDENDO UN VETTORE V_1 A CASO, POI CERCARNE UN SECONDO $V_2 \perp A V_1$, CON I PRODOTTO SCALARE NULLO, POI UN $V_3 \perp A V_1$ E $\perp A V_2$ E COSÌ VIA ...

OPPURE: Data una base B di uno spazio euclideo n-dimensionale, ne cerchiamo una ortogonale a partire da quella data:

<u>Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt</u>

Siano $v_1, \dots, v_k$ vettori l. indip. in uno spazio euclideo n-dimensionale:

siano $L_1=\langle\langle v_1\rangle\rangle$, $L_2=\langle\langle v_1, v_2\rangle\rangle$, $L_3=\langle\langle v_1, v_2, v_3\rangle\rangle$, ... , $L_k=\langle\langle v_1, v_2, \dots, v_k\rangle\rangle$, chiaramente $L_1\subset L_2\subset L_3\subset\dots\subset L_k$

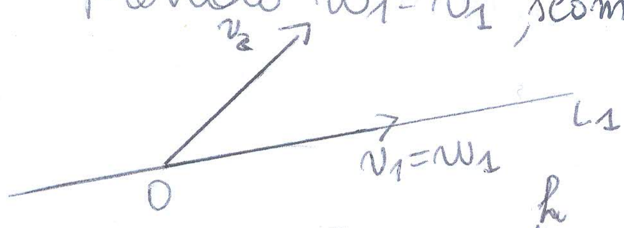
$\overset{1)}{\Rightarrow}$ $\exists$ k vettori $w_1, \dots, w_k$ ortogonali t.c.
$L_j=\langle\langle w_1, w_2, \dots, w_j\rangle\rangle \quad \forall j=1,\dots,k$

2) Se $\exists$ vettori $u_1, \dots, u_k$ ortogonali t.c.
$L_j=\langle\langle u_1, \dots, u_j\rangle\rangle \Rightarrow u_j=\alpha_j \cdot w_j \quad \forall j=1,\dots,k \quad \alpha_j\in\mathbb{R}$.

Dimostrazione per induzione su k.

1) per $k=1$ ovvia perché ho un unico vettore e prendo $w_1=v_1$

2) per $k=2$ $\Rightarrow$ ho v_1, v_2 e cerco w_1, w_2 t.c. $w_1\perp w_2$
E I SOTTOSPAZI GENERATI COINCIDANO:
prendo $w_1=v_1$, scompongo $v_2=g+h$ con $g\in L_1=\langle\langle v_1\rangle\rangle$



cioè $g=\alpha_1 v_1=\alpha_1 w_1$
e $h\in L_1^{\perp}\Rightarrow$ pongo ~~w_2~~
$h = w_2=v_2-\alpha_1 w_1\in L_2$

Inoltre $\overset{1)}{}$ i sottospazi $\langle\langle w_1, w_2\rangle\rangle\subset\langle\langle v_1, v_2\rangle\rangle$ perché $w_1=v_1$ e $w_2\in\langle\langle v_1, v_2\rangle\rangle$ perché è una loro combinazione lineare.
2) $\langle\langle v_1, v_2\rangle\rangle\subseteq\langle\langle w_1, w_2\rangle\rangle$ perché $v_1=w_1$ e v_2 è comb. lin di w_1 e w_2 $\Rightarrow\langle\langle v_1, v_2\rangle\rangle\equiv\langle\langle w_1, w_2\rangle\rangle$

In generale suppongo dimostrata la proposizione fino a $k=h$ e dimostriamolo per $k=h+1$

$\Rightarrow v_{h+1} = g + \bar{h}$ con $g \in \langle\langle w_1, \dots, w_h \rangle\rangle = L_h$ e

$\bar{h} \in (L_h)^\perp \Rightarrow$ basta prendere $w_{h+1} = v_{h+1} - \sum_{j=1}^{h} \alpha_j w_j$

così sono ortogonali

e inoltre $\langle\langle w_1, \dots, w_{h+1} \rangle\rangle = \langle\langle v_1, \dots, v_{h+1} \rangle\rangle$ per il ragionamento precedente. ~~Per trovare i vettori di una base ortogonale~~ FATTO PER 2 VETTORI

Dimostrare per caso la seconda parte della proposizione.

cvd