Esiste una biezione tra l'insieme delle forme bil. simmetriche su V e l'insieme delle forme quadratiche su V cioè:

$$\emptyset : \text{Bil. simm}(V) \longrightarrow \text{Quadrat}(V)$$
$$F \longmapsto Q$$

tale che $\emptyset(F) = Q$ con $Q(v) = F((v,v))$ $\forall v \in V$ e con $\emptyset^{-1}(Q) = F_Q$ f. bil. polare di Q

Fissata una base B_V in $V \Longrightarrow$ si può associare a Q una matrice quadrata $n \times n$: quale?

a Q associo F_Q tale che $F_Q((v,v)) = Q(v)$

$\Rightarrow$ considero $F_Q((v,w))$: nella base B_V pongo $[v]_{B_V} = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

e $[w]_{B_V} = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow F_Q((v,w)) = F((X,Y)) =$

$= F_Q((X,Y)) = X^T [F_Q]_{B_V} Y$

ora $Q(X) = F_Q((X,X)) = X^T [F_Q]_{B_V} X$

$$\Longrightarrow [Q]_{B_V} \equiv [F_Q]_{B_V}$$

Esempio:

$$Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$$

- È forma quadratica?

È una forma perché va in $\mathbb{R}$

1) $Q(\alpha X) = \alpha^2 Q(X)$

$$\alpha X = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow Q(\alpha X) = \alpha^2 x_1^2 \underbrace{-2\alpha x_1 \alpha x_2}_{2\alpha^2 x_1 x_2} - \alpha^2 x_2^2 =$$

$= \alpha^2 (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)$ ✓ è verificata

2) $F((v,w)) = Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$

- È forma bilineare simmetrica?

È forma perché Q è forma

- **È bilineare?**

$F((\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w)) = \alpha_1 F((v,w)) + \alpha_2 F((v_2,w))$

e $F((v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2)) = \beta_1 F((v,w_1)) + \beta_2 F((v,w_2))$

$\forall\, v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$ e $\forall\, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$

oppure dove l'espressione analitica

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ \underline{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X} + \underline{Y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F((\underline{X}, \underline{Y})) = (x_1+y_1)^2 - 2(x_1+y_1)(x_2+y_2) + (x_2+y_2)^2 + \\ - \cancel{x_1^2} + 2x_1x_2 - \cancel{x_2^2} - \cancel{y_1^2} + 2y_1y_2 - \cancel{y_2^2}$$

$$= 2x_1y_1 - \cancel{2x_1x_2} - 2x_1y_2 - 2y_1x_2 - \cancel{2y_1y_2} + 2x_2y_2 \\ + \cancel{2x_1x_2} + \cancel{2y_1y_2}$$

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \boxed{2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 2x_2y_2 - 2y_1x_2}$$

È UN POLINOMIO DI SECONDO GRADO OMOGENEO NELLE VARIABILI x_i E y_i

$\Rightarrow$ è simmetrica?

$$F((\underline{X}, \underline{Y})) = F((\underline{Y}, \underline{X})) \Rightarrow F((Y, X)) =$$

$$F\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 2y_1x_1 - 2y_1x_2 + 2y_2x_2 - 2x_1y_2$$

✓

È simmetrica.

È una forma quadratica perché è espressa da un polinomio di 2° grado omogeneo nelle variabili dello spazio.

03/04/2017

Fisso la base canonica in $\mathbb{R}^2$ cerco $[Q]_e$ perché $[Q]_e = [F_Q]_e$

$\Rightarrow$ cerco $F_Q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto \frac{2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 2x_2y_2 - 2y_1x_2}{2} =$$

divisione per 2 possiamo perché lavoro in un campo con caratteristica diversa da 2

$$= x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_2 - y_1x_2$$

$$\Rightarrow [F_Q]_e = [Q]_e = \begin{pmatrix} F((e_1,e_1)) & F((e_1,e_2)) \\ F((e_2,e_1)) & F((e_2,e_2)) \end{pmatrix}$$

$$[F_Q]_e = [Q]_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

SE HO LA FORMA QUADRATICA Q e VOGLIO OTTENERE PIU' VELOCEMENTE LA MATRICE ASSOCIATA (della forma polare) se lavoriamo con la base canonica

Per la costruzione della matrice prendo i COEFFICIENTI DEI TERMINI AL QUADRATO E LI metto lungo la diagonale: IN GENERALE: SE ABBIAMO $a_{ii}x_i^2 + \dots$

$$\left.\begin{array}{l} x_1y_1 = x_1^2 \\ x_2y_2 = x_2^2 \\ \vdots \\ x_ny_n = x_n^2 \end{array}\right| \longrightarrow \text{SCRIVEREMO} \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Gli altri coefficienti: prendo il termine misto e NE divido per 2 i COEFFICIENTI CIOE' SE COMPARE $a_{ij}x_ix_j$ PONIAMO $a_{ij}x_ix_j = \frac{a_{ij}}{2}x_ix_j + \frac{a_{ij}}{2}x_jx_i$

E NELLA MATRICE AVREMO:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & \begin{pmatrix} \cdots & a_{ij}/2 \\ a_{ij}/2 & \cdots \end{pmatrix} \end{array}$$

Si può operare anche per il "viceversa": dalla matrice alla forma quadratica

Viceversa se do una matrice simmetrica $\Rightarrow$ posso associare una forma quadratica Q in modo che tale matrice sia $[Q]_e$

Esempio:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} & & \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array} \Rightarrow \text{associo } Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2x_1 + 4x_2x_2 + 5x_2x_3 + 3x_3x_1 + 5x_3x_2 + 6x_3x_3$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2x_1 + 4x_2^2 + 5x_2x_3 + 3x_3x_1 + 5x_3x_2 + 6x_3^2$$

$\Downarrow$

FORMA QUADRATICA

$$= x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 10x_2x_3 + 6x_3^2$$

$$\begin{array}{c c} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \end{array} \Rightarrow \text{associo } F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2 + 5x_2y_3 + 3x_3y_1 + 5x_3y_2 + 6x_3y_3$$

$\Downarrow$

FORMA BILINEARE

03/04/2017

TEOREMA (di Silvester o d'Inerzia per le forme quadratiche reali)

Devo lavorare in $\mathbb{R}$

Data $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ forma quadratica $\Longrightarrow \exists\, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ tale che

F. ortogonale

$$[Q]_{B_{\mathbb{R}^n}} = \begin{array}{r} \\ \\ p \\ \\ r \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \qquad\qquad & p \qquad\qquad & r \qquad\qquad \end{array} \\ \begin{pmatrix} \begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix}-1&&\\&\ddots&\\&&-1\end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{matrix}0&&\\&\ddots&\\&&0\end{matrix} \end{pmatrix} \end{array}$$

cioè $[Q]_{B_{\mathbb{R}^n}}$ è diagonale tale che $a_{ii} = 1 \ \forall i = 1, \dots, p$

$a_{jj} = -1 \ \forall j = p+1, \dots, r$

$a_{kk} = 0 \ \forall k = r+1, \dots, n$

Inoltre il numero di entrate positive è un invariante, detto INDICE DI **INERZIA** POSITIVO e il numero di entrate negative è un invariante detto INDICE DI INERZIA NEGATIVO.

Dimostrazione:

Supponiamo che $\exists$ una base B di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla quale $[Q]_B$ è diagonale $\Longrightarrow$ posso supporre che a meno di riordinare i vettori di base

$a_{ii} > 0$ per $i = 1, \dots, p$ $\longrightarrow$ Posto $B = \{v_1, \dots, v_n\} \Longrightarrow a_{ii} = Q(v_i) = F_Q(v_i, v_i)$

$a_{jj} < 0$ per $j = p+1, \dots, r$

posto r il rango della matrice per cui $a_{kk} = 0 \ \forall k = r+1, \dots, n$