2/11/16

PROPOSIZIONE:

data una base B di uno spazio vettoriale $V \Rightarrow$ ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori di B

DIMOSTRAZIONE

supponiamo $\dim V = n \Rightarrow B = \{v_1, \dots v_n\}$, supponiamo che essendo i vettori di base generatori di V, ogni vettore v si scrive come loro combinazione lineare e la n-upla dei coefficienti di tale combinazione definisce il vettore delle coordinate di v nella base B, cioè se $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \Rightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

Dimostriamo l'unicità per assurdo:

supponiamo $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$ e $v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j$, $\alpha_j, \beta_j \in K$

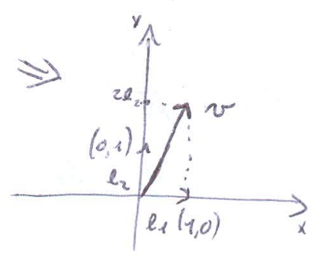
$\forall j = 1, \dots, n \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \rightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j - \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j = 0 \Rightarrow$ essendo i v_j vettori di base e quindi linearmente indipendenti $\Rightarrow$

$\alpha_j - \beta_j = 0 \;\forall j = 1, \dots, n \Rightarrow \alpha_j = \beta_j \;\forall j = 1 \dots n$

C.V.D

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ se fisso la base canonica in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$\mathcal{E} = \{e_1, e_2\} \rightarrow v = e_1 + 2e_2$



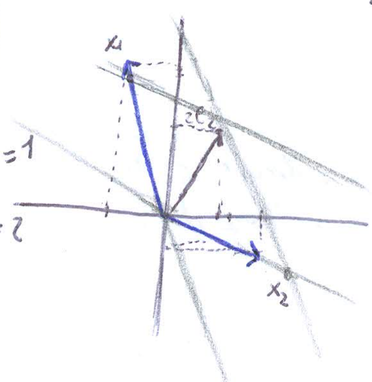
cambio base in $\mathbb{R}^2$: $B = \{v_1, v_2\}$ e cerco $[v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ dove $v = x_1 v_1 + x_2 v_2$

prendo $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

cerco $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = -1 + 2x_2 \\ -3 + 6x_2 - x_2 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ \cancel{5} x_2 = \cancel{5}_1 \end{cases}$



riscrivo matricialmente il sistema $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (modo matriciale)

(altro modo: dare al vettore dei termini noti come combinazione lineare dei vettori colonna della matrice dei coefficienti)

in generale: POSSIAMO SCRIVERE UN SISTEMA LINEARE IN 3 MODI DIVERSI:

1) $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pm}x_m = b_p \end{cases}$ forma scalare

2) $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{p1} & \dots & a_{pm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ forma matriciale (EVIDENZIANDO LA MATRICE DEI COEFFICIENTI)

3) $x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix} + \dots + x_m\begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$

forma vettoriale (SI CONSIDERA IL VETTORE DEI TERMINI NOTI COME COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI COLONNA DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI)

<u>matrice del cambiamento di base</u>

Per determinare le nuove coordinate del vettore v dell'esempio abbiamo risolto il sistema $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante $\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$\Rightarrow$ moltiplicando a sinistra per A^{-1} ottengo $\underbrace{A^{-1} A}_{I}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

CERCO A^{-1}:

Nell'esempio dato A^{-1}: $\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{3R_1+R_2 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right)$

$\overset{5R_1-2R_2 \to R_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} -5 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & +1/5 & +2/5 \\ 0 & 1 & 3/5 & 1/5 \end{array}\right)$

$\uparrow$ A^{-1}

$\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 3/5 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ le colonne della matrice A^{-1} esprimono le coordinate dei vettori della "vecchia base" nella "nuova base"

$\underset{B_1}{\text{"vecchia base"}}$, $\underset{B_2}{\text{"nuova base"}}$

In generale:

$$M_{B_2}^{B_1}[v]_{B_1} = [v]_{B_2}$$