ESERCIZIO — SE $D \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ È MATRICE DIAGONALE — 01-03-2017

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ 0 & a_{22} & \\ & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \underbrace{D \cdot D \dots D}_{K \text{ VOLTE}} = \begin{pmatrix} a_{11}^k & & 0 \\ \vdots & a_{22}^k & \\ 0 & & a_{nn}^k \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{N}$$

DIMOSTRARE L'UGUAGLIANZA $D^k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & & 0 \\ 0 & \ddots & a_{nn}^k \end{pmatrix}$ (PER INDUZIONE SU K)

DA FARE !

ESERCIZIO — LA K-ESIMA POTENZA DI UNA MATRICE $A \in M_{n \times n}$ POSTO A DIAGONALIZZABILE.

A DIAGONALIZZABILE $\Rightarrow \exists\, D, S \in M_{n \times n}$ D DIAGONALE, S INVERTIBILE, TALI CHE

$$D = S^{-1} A S \Rightarrow S D S^{-1} = A \Rightarrow A^k = (S D S^{-1})^k =$$

$$\underbrace{(S D S^{-1})(S D S^{-1}) \dots (S D S^{-1})}_{K \text{ VOLTE}}$$

$$\Rightarrow A^k = S D \underbrace{S^{-1} \; S D (S^{-1} S) D (S^{-1} S) \dots (S^{-1} S)}_{K \text{ VOLTE}} D S^{-1} =$$

$$= S D I D I \; D I \dots I D S^{-1} = S \underbrace{D D \dots D}_{K \text{ VOLTE}} S^{-1} = S D^k S^{-1}$$

ES

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad A^{120} \Rightarrow A^{120} = S D^{120} S^{-1} \Rightarrow *_1$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25+8}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2} \Rightarrow A \sim_S D = \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3+\sqrt{33} & 3-\sqrt{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{5+\sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & 4 - \frac{5-\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3+\sqrt{33} \end{pmatrix} \right\} \qquad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3-\sqrt{33} \end{pmatrix} \right\}$$

TROVO $S^{-1} = \dots$

$$*_1 \; A^{120} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3+\sqrt{33} & 3-\sqrt{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix} \left(S^{-1} \right)$$

SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE SUL CAMPO K; CONSIDERO L'APPLICAZIONE t_a COSÌ DEFINITA: FISSATO UN VETTORE $a \in V$, t_a $\begin{array}{l} V \longrightarrow V \\ v \longmapsto a+v \end{array}$

t_a È BIETTIVA (FARE)

t_a È UNA APPLICAZIONE LINEARE? : $t_a(\alpha v_1 + \beta v_2) \overset{?}{=} \alpha t_a(v_1) + \beta t_a(v_2)$

$$a + \alpha v_1 + \beta v_2 \overset{?}{=} \alpha(a+v_1) + \beta(a+v_2) \qquad \forall \alpha\beta \in K \text{ e } \forall v_1, v_2 \in V$$

$$\overset{\parallel}{\alpha a + \alpha v} + \beta a + \beta v_2$$

$$\overset{\parallel}{(\alpha+\beta) a} + \alpha v_1 + \beta v_2 \neq a + \alpha v_1 + \beta v_2$$

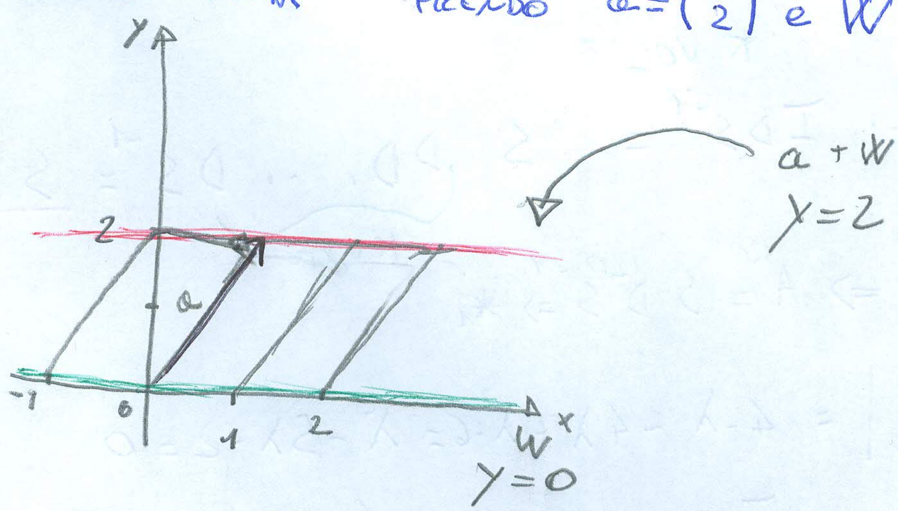
L'APPLICAZIONE t_a NON È LINEARE (A MENO CHE $a = 0$)

t_a È DETTA TRASLAZIONE (DI VETTORE a)

DEFINIZIONE

$\rightarrow$ UN SOTTOINSIEME DI $\mathcal{A}$ DI V È DETTO SOTTOSPAZIO AFFINE DI V SE $\exists$ UN VETTORE $a \in V$ ED UN SOTTOSPAZIO $W < V$ TALI CHE $\mathcal{A} = a + W = \{a + w \mid w \in W\}$, CIOÈ $\mathcal{A} = t_a(W)$

ESEMPIO $\rightarrow$ $V = \mathbb{R}^2$ PRENDO $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e W SIA LA RETTA $y = 0$



OSSERVAZIONE 1

↳ DATO $\mathcal{Q} = a + W$, $a \in V$ e $W \leq V$, $\Rightarrow a \in \mathcal{Q}$

PERCHÉ È L'IMMAGINE DELL'ORIGINE.

$a = a + 0 = t_a(0)$

OSSERVAZIONE 2

↳ a CHE DEFINISCE $\mathcal{Q}$, NON É UNICO BASTA PRENDERE UN ELEMENTO DI $\mathcal{Q}$

AD ESEMPIO $b \in \mathcal{Q} \Rightarrow$ SI DIMOSTRA CHE $\mathcal{Q} = b + W$

CIOÈ VOGLIO DIMOSTRARE CHE $\underset{\overset{\parallel}{\mathcal{Q}}}{a + W} = b + W$

$a + W \subseteq b + W$: SIA $c \in a + W^{-1} \Rightarrow c = a + w \Rightarrow$ ESSENDO

$b \in \mathcal{Q} \Rightarrow b = a + u$ CON $u \in W \Rightarrow a = b - u \Rightarrow$

$c = b \underbrace{- u + w}_{\in W} = b + v = c \in b + W$, $v = -u + w$

ANALOGAMENTE SI DIMOSTRA CHE $b + W \subseteq a + W \Rightarrow a + W = b + W = \mathcal{Q}$

OSSERVAZIONE 3

↳ IL SOTTOSPAZIO W TALE CHE $\mathcal{Q} = a + W$ È UNIVOCAMENTE DETERMINATO,

INFATTI SE $a + W$ e $\mathcal{Q} = a + W_1 \Rightarrow a + W = a + W_1 \Rightarrow W = W_1$

→ IL SOTTOSPAZIO $W \mid \mathcal{Q} = a + W$ È DETTO DIREZIONE o GIACITURA DI $\mathcal{Q}$

NELL'ESEMPIO PRECEDENTE LA DIREZIONE DELLA RETTA $y = 2$?

DEFINIZIONE

↳ LA DIMENSIONE DEL SOTTOSPAZIO AFFINE $\mathcal{Q} = a + W$ È PARI ALLA DIMENSIONE DELLA SUA DIREZIONE.

DEFINIZIONE

↳ DUE SOTTOSPAZI AFFINI $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ SI DICONO PARALLELI SE LA DIREZIONE DEL SOTTOSPAZIO DI DIMENSIONE INFERIORE È CONTENUTA NELLA DIREZIONE DEL SOTTOSPAZIO DI DIMENSIONE MAGGIORE.

* CASO PARTICOLARE

↳ SE $\dim \mathcal{Q}_1 = \dim \mathcal{Q}_2 \Rightarrow$ ESSI SONO PARALLELI SE HANNO LA STESSA DIREZIONE.

DALLA DEFINIZIONE $\mathcal{Q} = a + W$ DI SOTTOSPAZIO AFFINE, DERIVA SUBITO UNA RAPPRESENTAZIONE, QUELLA PARAMETRICA: UN QUALUNQUE ELEMENTO DI $\mathcal{Q}$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ È DATO COME $X = a + w,\ w \in W \Rightarrow$ FISSATA UNA BASE DI W, $B_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$, $w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_k w_k$

$\Rightarrow X = a + \lambda_1 w_1 + \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k$ ESPRIMIAMO LE COORDINATE DEI VETTORI

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} w_{12} \\ w_{n1} \\ \vdots \\ w_2 \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_k \begin{pmatrix} w_{1k} \\ w_{2k} \\ \vdots \\ w_{nk} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda_1 w_{11} + \lambda_2 w_{12} + \ldots + \lambda_k w_{1k} \\ x_2 = a_2 + \lambda_1 w_{21} + \lambda_1 w_{21} + \ldots + \lambda_k w_{2k} \\ x_n = a_n + \lambda_1 w_{k1} + \ldots + \lambda_k w_{nk} \end{cases}$$

QUESTA È L'EQUAZIONE PARAMETRICA DEL SOTTOSPAZIO AFFINE

DA QUESTA EQ PARAMETRICA SI RICAVA L'EQUAZIONE CARTESIANA CHE SARÀ DUNQUE ESPRESSA DA UN SISTEMA LINEARE NON OMOGENEO DI n VARIABILI E $(n-k)$ EQ. DI CUI IL SOTTOSPAZIO AFFINE È LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI.

CONSIDERO UN SISTEMA LINEARE NON OMOGENEO $\Sigma\ AX = B$, IL CUI SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO È $\Sigma_0\ AX = 0$; SIA $Sol\,\Sigma_0$ IL SOTTOSPAZIO VETTORIALE DELLE SOLUZIONI DELL'OMOGENEO, $\tilde{X}$ UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DEL SISTEMA NON OMOGENEO, CIOÈ $\tilde{X} \in Sol\,\Sigma \Rightarrow$

DIMOSTRIAMO CHE $Sol\,\Sigma = \tilde{X} + Sol\,\Sigma_0$

1) $\tilde{X} + Sol\,\Sigma_0 \subseteq Sol\,\Sigma$ e 2) $Sol\,\Sigma \subseteq \tilde{X} + Sol\,\Sigma_0$

~~SIA $\tilde{X} + Sol\,\Sigma_0$~~

1) SIA $\tilde{x} + v_0 \in \tilde{X} + Sol\,\Sigma_0 \Rightarrow$ CONSIDERO $Ax = B \Rightarrow$

$A(\tilde{x} + v_0) = A\tilde{x} + Av_0 = B + 0 = B \Rightarrow \tilde{x} + v_0 \in Sol\,\Sigma$

2) SIA $\tilde{y} \in Sol\,\Sigma \Rightarrow \boxed{A\tilde{y} = B \text{ E INOLTRE } A\tilde{x} = B} \Rightarrow A\tilde{y} = A\tilde{x} \Rightarrow A\tilde{y} - A\tilde{x} = 0 \Rightarrow$

$A(\tilde{y} - \tilde{x}) = 0 \Rightarrow \tilde{y} - \tilde{x} \in Sol\,\Sigma_0 \Rightarrow \exists\, v_0 \in Sol\,\Sigma_0 \mid \tilde{y} - \tilde{x} = v_0 \Rightarrow$

$\tilde{y} = \tilde{x} + v_0$ cvd.