Nello spazio tridimensionale si possono avere rette SGHEMBE, cioè rette che non si intersecano e non sono parallele.

ES. Vedere come si denotano due rette sghembe in $\mathbb{R}^3$ pensandole date mediante equazioni cartesiane ed equazioni parametriche. (guardare il sistema delle equazioni → il rango deve essere almeno 2).

$$r_1 \quad X = t\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

• si possono eguagliare le equazioni.

$$r_2 \quad x = t\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

ES $\exists$ piani sghembi in $\mathbb{R}^3$?

Definizione Si dice STELLA di piani l'insieme delle combinazioni di 3 piani in $\mathbb{R}^3$.

Se $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, $\pi_3: a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ La Stella avrà equazione

$$\Longrightarrow \lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + \dots) + \eta(a_3x \dots) = 0, \quad \lambda, \mu, \eta \in \mathbb{R}$$

$$\text{Se } \lambda \neq 0 \Rightarrow (a_1x + b_1y + \dots) + \underbrace{\frac{\mu}{\lambda}}_{=t}(a_2x + \dots) + \underbrace{\frac{\eta}{\lambda}}_{=s}(a_3x + \dots) = 0$$

SI POSSONO RIFARE PER LA STELLA LE OSSERVAZIONI FATTE PER IL FASCIO (FARE)

Un morfismo tra due strutture algebriche $(A, *)$ e $(B, \square)$ è un'applicazione $f\ A \to B$ tale che $f(a_1 * a_2) = f(a_1) \square f(a_2)$

MORFISMI TRA SPAZI VETTORIALI

Se le due strutture algebriche in esame sono spazi vettoriali i morfismi tra essi sono detti APPLICAZIONI LINEARI, quindi

Definizione Dati due spazi vettoriali V e W, su un campo K, un'applicazione lineare tra di essi è un'applicazione $L: V \to W$ tale che

1) $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) \quad \forall\, v_1, v_2 \in V$
2) $L(\alpha v) = \alpha L(v) \quad \forall\, \alpha \in K \text{ e } \forall\, v \in V$

Esempi Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to 2x + 3$ è lineare? 1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$
2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

$$\Rightarrow f(x+y) = 2(x+y) + 3 = 2x + 2y + 3$$
$$f(x) + f(y) = 2x + 3 + 2y + 3 = 2x + 2y + 6$$

$\Rightarrow$ NON lineare (prima condizione non verificata)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to 2x$

$f(x+y) = 2x + 2y = f(x) + f(y)$
$f(\alpha x) = 2\alpha x = \alpha f(x)$ <u>È</u> lineare

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to x^2$

$f(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$
$f(x) + f(y) = x^2 + y^2$ <u>NON</u> lineare

Esempio : $\boxed{\text{derivazione}}$

$\mathcal{C}^0[a,b] = \{ f\ [a,b] \to \mathbb{R} \text{ continua} \}$

Prendo $V = (\mathbb{R}[x])_3$ è spazio vettoriale reale di dimensione 4

$(\mathbb{R}[x])_3 \longrightarrow (\mathbb{R}[x])_3$

$p(x) \longrightarrow D(p(x)) \to$ grado inferiore (derivata)

$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \Rightarrow D(p(x)) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$

$q(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \Rightarrow D(p(x)+q(x)) = D[(a_3+b_3)x^3 + (a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x + a_0 + b_0] =$

$= 3(a_3+b_3)x^2 + 2(a_2+b_2)x + a_1 + b_1 = D(p(x)) + D(q(x))$

$D(\alpha p(x)) = D(\alpha a_3x^3 + \alpha a_2x^2 + \alpha a_1x + \alpha a_0) = 3\alpha a_3x^2 + 2\alpha a_2x + \alpha a_1 = \alpha D(p(x))$

<u>È</u> LINEARE (vale anche per l'integrazione)

<u>Definizioni</u> Se $L: V \to W$ è suriettiva $\Rightarrow L$ è detto <u>EPIMORFISMO</u>.

Se $L: V \to W$ è biettiva $\Rightarrow L$ è detto <u>ISOMORFISMO</u>.

<u>Definizione</u> Si dice <u>NUCLEO</u> di un'applicazione lineare $L: V \to W$ e si indica Ker L (o $N(L)$) l'insieme $\mathrm{Ker}\, L = \{ v \in V \mid L(v) = 0 \}$ vettore nullo.

PROPOSIZIONE:

Ker L è un sottospazio vettoriale di V <u>Dimostrazione</u>:

Se considero ~~xxxxx~~ $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}L \Rightarrow$ devo dim. che $v_1 + v_2 \in \mathrm{Ker}L$:

Se $v_1 \in \mathrm{Ker}L \Rightarrow L(v_1) = 0$ e se $v_2 \in \mathrm{Ker}L \Rightarrow L(v_2) = 0 \Rightarrow L(v_1+v_2) = L(v_1) + L(v_2) = 0$

per la <u>linearità di L</u>.

Se $v \in \mathrm{Ker}L \Rightarrow \alpha v \in \mathrm{Ker}L$ INFATTI: $L(\alpha v) = \alpha \underbrace{L(v)}_{0} = 0$

$0 \in \mathrm{Ker}L$? <u>Sì</u> perché $L(0) =$

$= L(v + (-v)) = L(v) + L(-v) = L(v) + L(-1 \cdot v) =$

$= L(v) - L(v) = 0$

Considero $\operatorname{Im} L = \{ w \in W \mid \exists v \in V \text{ con } L(v) = w \}$: è sottospazio vettoriale di W.

DIMOSTRAZIONE: $0 \in \operatorname{Im} L$ PERCHÉ $L(0) = 0$ quindi $0 \in \operatorname{Im} L$

Siano $w_1, w_2 \in \operatorname{Im} L \Rightarrow \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in \operatorname{Im} L$ INFATTI DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE:

SE $\exists\, v_1, v_2 \in V$ tali che $L(v_1) = w_1$ e $L(v_2) = w_2 \Rightarrow \exists\, v \in V$ tale che $L(v) = \alpha w_1 + \alpha w_2$?

Sì, basta prendere $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$, infatti

$L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$.

Proposizione: TEOREMA DELLE DIMENSIONI

Data $L: V \to W$ lineare $\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L = \dim V$.

Dimostrazione

Sia $\dim V = n$, $\dim \operatorname{Ker} L = p$ e $\dim \operatorname{Im} L = q$. Prendiamo $B_{\operatorname{Ker} L} = \{u_1, \dots, u_p\}$ e $B_{\operatorname{Im} L} = \{w_1, \dots, w_q\}$ con $w_1 = L(v_1)$, $w_2 = L(v_2)$, $w_3 = L(v_3)$, $\dots$, $w_q = L(v_q)$.

Sia $w \in \operatorname{Im} L \Rightarrow \exists\, v \in V$ tale che $w = L(v) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_q w_q =$

$= \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + \dots + \alpha_q L(v_q) = L(\alpha_1 v_1) + L(\alpha_2 v_2) + \dots + L(\alpha_q v_q) =$

$= L(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_q v_q)$ linearità di L.

$\Rightarrow$

$L(v) = L(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_q v_q) = 0 \to L(v - (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_q v_q)) = 0 \Rightarrow v - (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_q v_q) \in \operatorname{Ker} L$

$\Rightarrow v - (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_q v_q) = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_p u_p$. $\Rightarrow$

$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_q v_q + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_p u_p \Rightarrow u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q$ sono generatori di V.

Devo dimostrare che $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q$ sono lin. indip., quindi PONGO

$\gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_p u_p + \delta_1 v_1 + \dots + \delta_q v_q = 0$

$L(\gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_p u_p + \delta_1 v_1 + \dots + \delta_p v_q) = L(0) = 0$

$\underset{0}{\underset{\parallel}{\gamma_1 L(u_1)}} + \dots + \underset{0}{\underset{\parallel}{\gamma_p L(u_p)}} + \delta_1 L(v_1) + \dots + \delta_q L(v_q) = 0$

$+ \delta_1 w_1 + \dots + \delta_q w_q = 0 \to \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_q = 0$ POICHÉ

$w_1, \dots, w_q$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

$\Rightarrow \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \dots + \gamma_p u_p = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma_1 = \dots = \gamma_p = 0}$ PERCHÉ $u_1, \dots, u_p$ SONO LIN. IND.

$\Rightarrow u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q$ sono ~~t~~ lin. indip.

c.v.d.