RISOLVERE UN SISTEMA USANDO LE MATRICI

Facciamo un esempio

$$\Sigma : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$ Associamo a tale sistema una matrice completa $$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right)_{3\times4} \longrightarrow$$

Le operazioni elementari applicate alla matrice sono dette "operazioni elementari riga". La matrice ottenuta sarà equivalente alla precedente.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \underset{R_1 - R_3 \to R_3}{\overset{2R_1 - R_2 \to R_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{2R_2 + R_3 \to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right) \sim$$

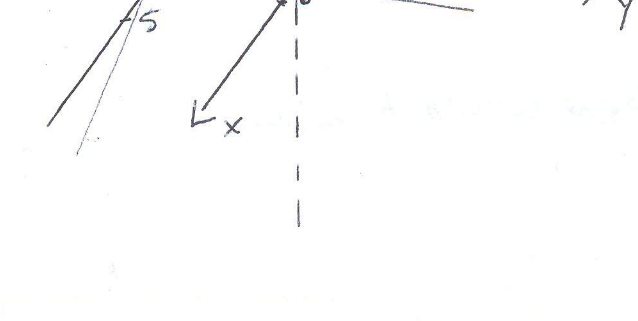
Per risolvere il sistema, anche nella matrice, come per i sistemi, si cerca di avere coefficienti nulli sotto ciascun PIVOT. Arrivati a questo punto, è terminata la parte in discesa del metodo di Gauss, e abbiamo ottenuto una matrice a scalini con 3 PIVOT. Possiamo subito notare che il sistema ha soluzione, e che il rango della matrice, non cambiando per equivalenza, è 3. Lo spazio ambiente è tridimensionale, e il rango è 3: ciò significa che lo spazio della soluzione è zero-dimensionale, cioè la soluzione è un punto di coordinate $(x; y; z)$. Procediamo con la risalita.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right) \underset{R_3 - R_1 \to R_1}{\overset{R_3 - R_2 \to R_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right) \overset{R_2 - R_1 \to R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right) \overset{-R_2 \to R_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

Questa è la forma finale della matrice: sopra e sotto i pivot c'è solo zero, e i pivot valgono tutti uno. Essa è detta forma a gradini canonica della matrice A. Scriviamo ora il sistema associato alla matrice finale, e possiamo vedere ora chiaramente quale è la soluzione del sistema. Il passo successivo è rappresentare graficamente la soluzione nel sistema di riferimento $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: DISEGNARE IL PUNTO: $(-1; -5; +9) = P$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -5 \\ z = 9 \end{cases}$$



MATRICI

- L'insieme delle matrici è costituito dalle tabelle ordinate di numeri reali. Una matrice con p righe ed n colonne è detta matrice $p \times n$

<u>Esempio</u>: matrice 2×3

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Essa è inoltre detta "<u>rettangolare</u>" se $p \neq n$; se invece $p = n$ allora A è detta "<u>quadrata</u>".

- Alcune matrici quadrate sono poi dette <u>diagonali</u>, qualora LE UNICHE entrate NON NULLE DELLA MATRICE SONO QUELLE DELLA diagonale del quadrato (PRINCIPALE). TALI entrate eventualmente POSSONO ESSERE NULLE ANCH'ESSE.

<u>Esempio</u>: $$D_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tale diagonale è detta diagonale <u>principale</u>, mentre l'altra è detta diagonale <u>secondaria</u>.

- Da un punto di vista generico la Matrice è indicata così:

Matrice $p \times n$ <u>generica</u> $$A_{p\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} =$$

E se vogliamo scrivere in modo compatto, allora si scrive così $$= (a_{ij}) \quad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, p \\ j = 1, \ldots, n \end{array}$$

<u>DEFINIZIONE</u>: $D_{n\times n}$ è matrice diagonale SE, posta $D_{n\times n} = (a_{ij})$ $\begin{array}{l} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, n \end{array}$ $\Rightarrow a_{ij} = 0 \;\; \forall\, i \neq j$

- Inoltre una matrice quadrata $A_{n\times n}$ è detta <u>triangolare superiore</u> se posta $A_{n\times n} = (a_{ij})$ $\begin{array}{l} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, n \end{array}$ $a_{ij} = 0 \;\; \forall\, i > j$

<u>Esempio</u>: $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Mentre è detta <u>triangolare inferiore</u> se posta $A_{n\times n}(a_{ij})$ $\begin{array}{l} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, n \end{array}$ $a_{ij} = 0 \;\; \forall\, i < j$

<u>Esempio</u>: $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Osservazione: Le matrici diagonali sono anche triangolari (sup. e inf.)

— Una matrice quadrata $A_{n\times n}$ è detta simmetrica se posta $A_{n\times n}=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$

$a_{ij}=a_{ji}\ \forall i\neq j$

Esempio:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{pmatrix}$$

Le operazioni con le matrici

Si opera sui sottoinsiemi dell'insieme delle matrici, cioè ad esempio si possono sommare matrici con lo stesso numero di righe e colonne. Considero quindi il sottoinsieme $\boxed{\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})}$, cioè l'insieme di matrici con p righe ed n colonne ad entrate reali. Definisco un'operazione fra tali matrici, la somma fra matrici così definita: date le matrici $A, B\in\mathcal{M}_{p\times n}$, con

$$A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p\\ j=1,\dots,n}} \text{ e } B(b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p\\ j=1,\dots,p}} \Rightarrow A+B=C\in\mathcal{M}_{p\times n} \text{ con}$$

$$C=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p\\ j=1,\dots,p}}$$

Esempio: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-2&3&\sqrt{2}\end{pmatrix}\Rightarrow A+B=C=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&8&6+\sqrt{2}\end{pmatrix}$

Questa operazione è binaria interna, perché somma due elementi e il risultato appartiene allo stesso insieme di questi. La struttura algebrica ci serve per spiegare e capire di quali proprietà gode tale operazione.

I. Vale la proprietà associativa? cioè $(A+B)+C=A+(B+C)\ \forall A,B,C\in\mathcal{M}_{p\times n}$?

Siano $A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p\\ j=1,\dots,n}}$ $B=(b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p\\ j=1,\dots,n}}$ e $C(c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p\\ j=1,\dots,n}}$

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})\Rightarrow(A+B)+C=\left((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}\right)_{\substack{i=1,\dots,p\\ j=1,\dots,n}}$$

$$A+(B+C)=\left(a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})\right)$$

l'uguaglianza é vera, perché l'operazione di somma fra numeri reali verifica la proprietá associativa. QUINDI OGNI ENTRATA DELLA MATRICA $(A+B)+C$ E' UGUALE ALLA CORRISPONDENTE ENTRATA DELLA MATRICE $A+(B+C)$

II. Vale la proprietá commutativa? $A+B=B+A$ Si PERCHE' ...

III. Esiste l'elemento neutro? Si, la matrice <u>nulla</u>$_{p\times n}$ $O=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

IV. Data A, esiste la matrice opposta? Si, é la matrice $-A=(-a_{ij})$

Siamo quindi in presenza di un <u>gruppo commutativo</u>: $(M_{p\times n}(\mathbb{R}),+)$