APPUNTI GEOMETRIA 30/05/16 ①

CENNI SUGLI SPAZI PROIETTIVI

EQUAZIONE RETTA SULLO SPAZIO PROIETTIVO:

$r: ax + by + c = 0$ ← NEL PIANO AFFINE, SI DÀ UNA TERNA DI NUMERI:

$x_3 \neq 0$ $\quad (x_1, x_2, x_3) \mid x = \frac{x_1}{x_3}$ e $y = \frac{x_2}{x_3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ANCHE LA TERNA $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ INDIVIDUA x e y

POSSO SCRIVERE $a\frac{x_1}{x_3} + b\frac{x_2}{x_3} + c = 0 \Rightarrow$ MOLTIPLICO PER x_3

$\Rightarrow ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ EQ. DELLA RETTA IN

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$

POICHÉ UN PUNTO IN $\mathbb{P}^2$ È UNA CLASSE DI EQUIVALENZA DI VETTORI DI $\mathbb{R}^3$, DI CUI AD ESEMPIO PER $P = [(\alpha, \beta, \gamma)]$, (α, β, γ) È UN RAPPRESENTANTE DELLA CLASSE, ALLORA ~~TUTTI~~ AFFINCHÉ P APPARTENGA ALLA RETTA, TUTTE LE TERNE DI SUE COORDINATE DEVONO ~~APPARTENERE ALLA~~ SODDISFARE L'EQUAZIONE DELLA RETTA r.:

SE LA TERNA (α, β, γ) SODDISFA L'EQUAZIONE ALLORA ANCHE ~~LE ALTRE COORDINATE A~~ GLI ALTRI APPARTENENTI ALLA CLASSE DI EQUIVALENZA DEVONO SODDISFARE L'EQUAZIONE DELLA RETTA, CIOÈ $(\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma)$ DEVE SODDISFARE r, $\forall\lambda$

$\Rightarrow$ SEGUE CHE L'EQUAZIONE DELLA RETTA DEVE ESSERE OMOGENEA. E UGUALMENTE PER OGNI ALTRO LUOGO GEOMETRICO DEGLI SPAZI PROIETTIVI.

· SOTTOSPAZIO PROIETTIVO

DATO UNO SPAZIO PROIETTIVO $\mathbb{P}^n$ n-DIMENSIONALE

$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ CON V SPAZIO VETTORIALE $(n+1)$-DIMENSIONALE:

UN SOTTOSPAZIO PROIETTIVO DI $\mathbb{P}^n$ È IL PROIETTIVO DI UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V, CIOÈ DEL TIPO $\mathbb{P}(W)$ CON $W \leq V$

LA DIMENSIONE DI $\mathbb{P}(W) = \dim(W) - 1$

OSSERVAZIONI:

- L'INTERSEZIONE DI SOTTOSPAZI PROIETTIVI È ANCORA SOTTOSPAZIO PROIETTIVO:

$W_1, W_2 < V \Rightarrow \mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2)$ È SOTTOSPAZIO PROIETTIVO, E $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$.

- NON È SEMPRE VERO CHE $\mathbb{P}(W_1) \cup \mathbb{P}(W_2)$ SIA SOTTOSPAZIO PROIETTIVO, TUTTAVIA LO È $\mathbb{P}(W_1 + W_2)$ CHE È DETTO <u>SPAZIO CONGIUNGENTE</u> I SOTTOSPAZI $\mathbb{P}(W_1)$ E $\mathbb{P}(W_2)$

TEOREMA: <u>FORMULA DI INCIDENZA</u>

$$\dim \mathbb{P}(W_1) + \dim \mathbb{P}(W_2) = \dim(\mathbb{P}(W_1 + W_2)) + \dim \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$$

DIM:
SAPENDO CHE $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$ PER IL TH. DI GRASSMAN $\Rightarrow$

$$\dim \mathbb{P}(W_1 + W_2) + \dim \mathbb{P}(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1 + W_2) - 1 +$$
$$+ \dim(W_1 \cap W_2) - 1 = \dim W_1 + \dim W_2 - \cancel{\dim(W_1 \cap W_2)} - 1 +$$
$$+ \cancel{\dim(W_1 \cap W_2)} - 1 = (\dim W_1 - 1) + (\dim W_2 - 1) = \dim \mathbb{P}(W_1) +$$
$$+ \dim \mathbb{P}(W_2).$$

c.v.d

- DEF: DUE SOTTOSPAZI PROIETTIVI $\mathbb{P}(W_1)$ E $\mathbb{P}(W_2)$ SONO DETTI: 1) COINCIDENTI SE $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \neq \emptyset$ *1
2) SGHEMBI SE $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \emptyset$ *2

*1 $\Leftrightarrow \dim(\mathbb{P}(W_1) + \mathbb{P}(W_2)) \geq 0$

*2 $\Leftrightarrow \dim(\mathbb{P}(W_1) + \mathbb{P}(W_2)) = -1$

- SIANO $\dim \mathbb{P}(W_1) = r$, $\dim \mathbb{P}(W_2) = s$

SUPPONIAMO $r + s \geq \dim \mathbb{P}(V) = n \Rightarrow$ tali SOTTOSPAZI SONO INCIDENTI:
CASO PARTICOLARE:
$\Rightarrow$ DUE RETTE IN $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ SI INTERSECANO SEMPRE.

- RICORDANDO CHE LA CODIMENSIONE DI UN SOTTOSPAZIO $\mathcal{L}$ (SOTTOSPAZIO DI UNO SPAZIO m-DIMENSIONALE) È $m - \dim \mathcal{L}$,
DICIAMO IPERPIANI I SOTTOSPAZI DI CODIMENSIONE 1 (retta nel piano, piano nello spazio, ecc.)

$\Rightarrow$ IN GENERALE DUE IPERPIANI NELLO SPAZIO PROIETTIVO SI INTERSECANO SEMPRE

- DEFINIZIONE:

DUE SOTTOSPAZI PROIETTIVI SI DICONO ESSERE IN POSIZIONE GENERALE SE LA LORO INTERSEZIONE HA DIMENSIONE MINIMA POSSIBILE.

- IN $\mathbb{P}^1$ HO COME SOTTOSPAZI PROIETTIVI PUNTI E $\mathbb{P}^1$ STESSO ~~LA MINI~~ ~~L'INTERSEZIO~~ LA MINIMA DIMENSIONE POSSIBILE PER L'INTERSEZIONE DEI DUE SOTTOSPAZI È -1 (INSIEME $\emptyset$)
- IN $\mathbb{P}^2$ I SOTTOSPAZI PROIETTIVI SONO: PUNTI, RETTE, $\mathbb{P}^2$

$\cap$	PUNTO	RETTA
PUNTO	$\emptyset$	$\emptyset$
RETTA	$\emptyset$	PUNTO

- IN $\mathbb{P}^3$

$\cap$	PUNTO	RETTA	PIANO
PUNTO	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
RETTA	$\emptyset$	$\emptyset$	PUNTO
PIANO	$\emptyset$	PUNTO	RETTA

IN $\mathbb{P}^n$ UN RIFERIMENTO PROIETTIVO È COSTITUITO DA $n+2$ PUNTI $P_0, P_1, \dots, P_n, U$ TALI CHE OGNI $(n+1)$ PUNTI FRA GLI $n+2$ DATI SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI (IN POSIZIONE GENERALE) ED INOLTRE $P_0 + P_1 + \dots + P_n = U$.

TALE RIFERIMENTO PROIETTIVO È ASSOCIATO AD UNA BASE DI V (CON $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$), $B_V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$.

I PUNTI $P_0, \dots, P_n$ SONO DETTI PUNTI FONDAMENTALI DEL RIFERIMENTO, U È DETTO PUNTO UNITÀ

A PARTIRE DA B_V POSSO SEMPRE DARE UN RIFERIMENTO PROIETTIVO:

$$P_0 = [(1,0,\dots,0)],\ P_1 = [(0,1,0,\dots,0)], \dots, P_n = [(0,0,\dots,1)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = [(1,\dots,1)]$$

VICEVERSA ASSEGNATI $(n+2)$-PUNTI IN POSIZIONE GENERALE $\exists$ SEMPRE UN SISTEMA DI RIFERIMENTO PROIETTIVO DA ESSI DERIVANTE.

ASSEGNATO IL SISTEMA DI RIFERIMENTO PROIETTIVO, POSSO DARE LE COORDINATE PROIETTIVE O OMOGENEE DEI PUNTI NELLO SPAZIO PROIETTIVO.

- ESEMPIO

$\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ assegno: 3 PUNTI $P_0 = [(1,2)]$, $P_1 = [(3,-1)]$, $P_2 = [(1,1)]$. VERIFICARE CHE SONO (IN POSIZIONE GENERALE, E CIOÈ LINEARMENTE INDIPENDENTI).

SCELTO $[(1,1)]$ COME PUNTO UNITÀ

DEVO TROVARE I RAPPRESENTANTI DI P_0, P_1 TALI CHE $P_0 + P_1 = P_2$ $\Rightarrow$ CERCO MULTIPLI DI $(1,2)$ E $(3,-1)$ TALI CHE $P_0 + P_1 = P_2$

$$\Rightarrow \alpha\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha + 3\beta = 1\\ 2\alpha - \beta = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = \frac{4}{7}\\ \beta = \frac{1}{7}\end{cases}$$

$P_0 = \left[\begin{pmatrix} 4/7 \\ 8/7 \end{pmatrix}\right]$, $P_1 = \left[\begin{pmatrix} 3/7 \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix}\right]$

I VETTORI $\left\{ \begin{pmatrix} 4/7 \\ 8/7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/7 \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \right\}$ FORMANO UNA BASE DI $\mathbb{R}^2$ CHE SI DICE ESSERE NORMALIZZATA RISPETTO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO INTRODOTTO : $\widetilde{\mathbb{B}}$

DATO IL PUNTO $P = [(2,3)]$ CERCO LE COORDINATE DI TALE VETTORE NELLA BASE NORMALIZZATA

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4/7 \\ 8/7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3/7 \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \frac{75}{28}, \ \mu = \frac{3}{7}$$

$\left(\frac{75}{28}, \frac{3}{7}\right)$ ESPRIME UNA COPPIA DI COORDINATE PROIETTIVE DI $P = [(2,3)]$. NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO DATO.

- ~~TEO~~

TEOREMA

FISSATO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO PROIETTIVO S, OGNI SOTTOSPAZIO PROIETTIVO ~~DATO~~ h-DIMENSIONALE DELLO SPAZIO PROIETTIVO DATO $\mathbb{P}(V)$, È DATO DA UN SISTEMA LINEARE OMOGENEO MINIMO DI $n-h$ EQUAZIONI IN $n+1$ VARIABILI, CON $\dim \mathbb{P}(V) = n$.

COME TROVIAMO TALE SISTEMA?

SI DANNO $(h+1)$ PUNTI NEL SOTTOSPAZIO DATO.

$P_0 = [(x_{0,0}, x_{0,1}, \dots x_{0,n})], \dots, P_h = [(x_{h,0}, x_{h,1}, x_{h,n})] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ PRESO $P = [(x_0, \dots, x_n)]$ AFFINCHÈ $P \in$ AL SOTTOSPAZIO DI CUI CERCHIAMO LE EQUAZIONI OCCORRE CHE

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_{0,0} & \cdots & x_{h,0} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_n & x_{0,n} & \cdots & x_{h,n} \end{pmatrix} \in M_{(n+1)\times(h+2)}$$

ABBIA RANGO $(h+1)$. È DATO UN SISTEMA LINEARE DI $(n-h)$ EQ. DI $(n+1)$ VARIABILI ANNULLANDO I MINORI $(h+2)\times(h+2)$ DELLA MATRICE.