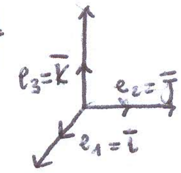
Esercizio $[v_1]_C$, $[v_2]_C$ 28/10/15

$B_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$: è base di $\mathbb{R}^2$? (sì) (1)

Se sì, determinare le coordinate del vettore $[v]_{\mathcal{E}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{B}$, cioè $[v]_{\mathcal{B}}$.

Se non è esplicitato nient'altro, le COORDINATE DEL mio vettore SONO I COEFFICIENTI DELLA COMBINAZIONE LINEARE CON la base canonica:

$$\mathcal{E} = \mathcal{C} = \{e_1, e_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



$\Downarrow$

le coordinate del vettore, quindi, coincidono con i coefficienti della combinazione lineare:

(Es.) Se considero in $\mathbb{R}^2$ il vettore

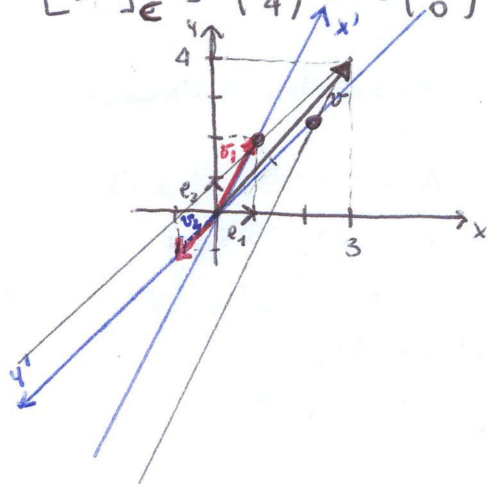
$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x e_1 + y e_2 = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$\downarrow$

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 3 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 + \alpha_2 \\ 6 + 2\alpha_2 - \alpha_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$[v]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



assi coordinati

- nuovi assi di riferimento, prolungamenti dei vettori v_1 e v_2.
- traccio delle rette parallele ai nuovi assi x' e y' partendo dalla punta di v. Queste rette incontreranno gli assi x' e y' in due punti $\Rightarrow$ Questi due punti DEFINISCONO le coordinate di $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ LUNGO TALI ASSI

Nell'esempio dato $[v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (vettore nella base canonica)

$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (vettore nella base data $\mathcal{B}$)

Considero il sistema lineare coinvolto:

ottengo la matrice $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{array} \right)$.

matrice dei coefficienti

variabili = coordinate del vettore nella nuova base

= coordinate del vettore nella vecchia base

Scrivo matricialmente il sistema Σ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \end{array}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\nearrow$ rango = 2 (rango massimo)

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ è detta **MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE**

ed è indicata: $M_{CB} = M_C^B$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{M_c^B \cdot [v]_B = [v]_c} \Rightarrow \underbrace{(M_c^B)^{-1} \cdot M_c^B}\cdot [v]_B = (M_c^B)^{-1} \cdot [v]_c$$

$$[v]_B = I \cdot [v]_B = (M_c^B)^{-1} \cdot [v]_c$$

$$\Downarrow$$

$$[v]_B = M_B^c \cdot [v]_c$$

Cerchiamo la matrice inversa:

$$M_c^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (M_c^B)^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{2R_1+R_2\to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & +1 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{R_1+R_2\to R_1}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$= M_B^c$

(o troviamo il vettore con il sistema (come abbiamo fatto prima) o con la matrice del cambiamento di base).

Esempi sull'uso della combinazione lineare dei vettori:

① Concetto di **MEDIA PESATA**:

Es. Siano A, B, C tre studenti che hanno riportato i seguenti voti nelle due parti di un esame scritto:

	A	B	C
I parte	20	24	26
II parte	28	30	24

$\rightarrow$ media per: $A = \frac{20+28}{2} = \frac{1}{2}\cdot 20 + \frac{1}{2}\cdot 28 = 24$

$B = \frac{24+30}{2} = 27$

$C = \frac{26+24}{2} = 25$

Possiamo vedere questo esempio vettorialmente:

Formo due vettori $v_1 = (20, 24, 26)$ e $v_2 = (28, 30, 24)$

Ciò significa determinare il vettore v.

$$\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 = \left(\frac{1}{2}\cdot 20 + \frac{1}{2}\cdot 28,\ \frac{1}{2} 24 + \frac{1}{2} 30,\ \frac{1}{2}\cdot 26 + \frac{1}{2}\cdot 24\right) = (24, 27, 25)$$

SUPPONIAMO ORA CHE LE DUE PARTI DELL'ESAME ABBIANO PESI DIVERSI, AD ES. 5 CREDITI E 3 CREDITI $\Rightarrow$ Ora considero la MEDIA PESATA di questi voti:

$$V = \frac{5}{8}v_1 + \frac{3}{8}v_2 = (23, 26.25, 25.25)$$

② **BARICENTRO** di un SISTEMA geometrico DI CORPI

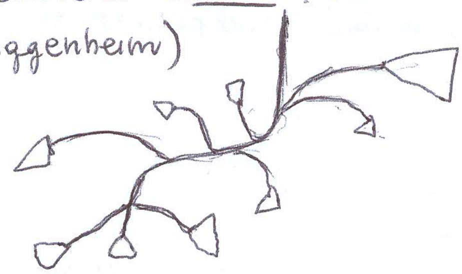
Siano dati in $\mathbb{R}^3$, K corpi di dimensioni trascurabili e di massa m_i per $i = 1, \dots, K$, disposti nei punti di $\mathbb{R}^3$ di coordinate (x_i, y_i, z_i) $i = 1, \dots, K$.

Il Baricentro (o CENTRO DI MASSA) di questi corpi è per definizione il vettore $C = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{M} v_i$ con $M = \sum_{i=1}^{k} m_i$ massa complessiva del sistema.

$$= \frac{m_1}{M} v_1 + \frac{m_2}{M} v_2 + \dots + \frac{m_k}{M} v_k$$ (COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI $v_1, v_2, \dots, v_k$)

- Ci sono delle sculture che si basano sul baricentro dei corpi, realizzate dall'artista CALDER (sculture cinetiche):

Es. (Venezia, Guggenheim)



Proposizione:

Sia V spazio vettoriale e $V = \langle\langle v_1, \dots, v_k \rangle\rangle$.
Considero $w_1, \dots, w_p \in V \Rightarrow$ se $p > k \Rightarrow$ i vettori $w_1, \dots, w_p$ sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione

Abbiamo $w_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij} v_i$ e $j = 1, \dots, p$.

Considero $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_p w_p = 0$

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{k} \alpha_{i1} v_i + \dots + \lambda_p \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ip} v_i = 0$$

$$(\lambda_1 \alpha_{i1} + \lambda_2 \alpha_{i2} + \dots + \lambda_p \alpha_{ip}) v_i + \dots + (\lambda_1 \alpha_{k1} + \lambda_2 \alpha_{k2} + \dots + \lambda_p \alpha_{kp}) v_k = 0$$

Se $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{ho} \begin{cases} \lambda_1 \alpha_{i1} + \dots + \lambda_p \alpha_{ip} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 \alpha_{k1} + \dots + \lambda_p \alpha_{kp} = 0 \end{cases}$$

sistema lineare omogeneo di k equazioni e p incognite

so che $p > k \Rightarrow$ il rango è massimo, ho soluzione, POICHÈ IL rango è minore del numero delle variabili.

Tale sistema ha soluzioni $\neq 0$, $\Rightarrow w_1, \dots, w_p$ sono linearmente dipendenti.

Se $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti $\Rightarrow$ basta considerare solo quelli linearmente indipendenti e ripetere il ragionamento.

C.V.D

Proposizione:

Se considero in uno spazio vettoriale V, la base $B = \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Le coordinate di un vettore v in tale base sono UNICHE, cioè v si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base B.

Dimostrazione (per assurdo):

Supponga che $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$ e $v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n - \beta_1 v_1 - \dots - \beta_n v_n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = 0$

poiché $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ \alpha_2 - \beta_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n - \beta_n = 0 \end{cases} \Rightarrow$ la combinazione lineare è UNICA!

→ Posso dare INFINITE basi in uno spazio vettoriale (costituite dello stesso numero di elementi).

Proposizione:

Date $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B_2 = \{w_1, \dots, w_p\}$ basi di $V \Rightarrow n = p$

Dimostrazione (Hint (= INPUT)) per assurdo $n \neq p \Rightarrow$

$\Rightarrow$ può essere $n > p$ o $n < p$.

1) Caso supponiamo $n > p \dots$

⇓

Dimostrazione per casa

• La cardinalità di un INSIEME FINITO è il numero di elementi dell'insieme finito.

DEFINIZIONE: LA CARDINALITÀ DI UNA QUALUNQUE BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE, DEFINISCE LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO VETTORIALE