Corso di Geometria per Fisica

Minima distanza di due rette

Date due rette r ed s nello spazio, ha senso chiedersi qual è la **minima distanza** fra esse, cioè la più piccola lunghezza di un vettore del tipo $P - Q$, con $P \in r$ e $Q \in s$.

Definizione 0.1 *Due rette dello spazio non complanari si dicono* **sghembe**.

Osservazione 0.2 *Ovviamente, due rette sono complanari se e solo se sono incidenti (cioè hanno uno e un solo punto i comune) o parallele (cioè hanno vettori direzionali proporzionali).*

Osservazione 0.3 *Se due rette sono incidenti, la loro minima distanza è* 0. *Se esse sono parallele, per calcolare la minima distanza fra loro basta considerare un qualsiasi piano* π *perpendicolare ad esse, considerare i punti di intersezione* P *e* Q *del piano con le due rette e calcolare la lunghezza del vettore* $P - Q$.

Esempio 0.4 *Le rette* r *ed* s *che hanno le rappresentazioni cartesiane*

$$r: \quad \begin{cases} x + z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \qquad s: \quad \begin{cases} x + y + 3z = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

sono parallele, perché hanno vettori direzionali $v = (1, 0, 1) \times (1, -1, -1) = (1, 2, -1)$ *e* $w = (1, 1, 3) \times (0, 1, 2) = (-1, -2, 1)$, *manifestamente proporzionali.*
Un piano perpendicolare ad r, *e quindi anche ad* s, *è quello di equazione* $x + 2y - z = 0$.
Esso interseca r *in* $P = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ *ed* s *in* $Q = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ *e il vettore* $P - Q = (\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ *ha lunghezza* $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

Occupiamoci allora del caso di due rette sghembe, partendo da un esempio.
Consideriamo le rette aventi rappresentazioni parametriche

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & t & + & 1 \\ y & = & -t & + & 2 \\ z & = & 2t & + & 3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcrcr} x & = & -t & + & 1 \\ y & = & 3t & + & 3 \\ z & = & -2t & + & 1 \end{array}$$

Esse non sono parallele, perché i vettori direzionali $(1, -1, 2)$ e $(-1, 3, -2)$ non sono proporzionali.
E non hanno punti in comune, perché la prima e la terza equazione del sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr} t & + & 1 & = & -t' & + & 1 \\ -t & + & 2 & = & 3t' & + & 3 \\ 2t & + & 3 & = & -2t' & + & 1 \end{array}$$

non sono compatibili.
Poiché è evidente che un segmento di minima lunghezza congiungente un punto P di r con un punto Q di s è perpendicolare ad entrambe le rette, cerchiamo una direzione, rappresentata dal vettore non nullo (α, β, γ), che sia perpendicolare ad entrambe le rette.

Il vettore (α, β, γ) è perpendicolare ad entrambe le rette se e solo se le sue componenti sono soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(\alpha, \beta, \gamma)(1, -1, 2) = \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \qquad \text{e} \qquad (\alpha, \beta, \gamma)(-1, 3, -2) = -\alpha + 3\beta - 2\gamma = 0$$

le cui soluzioni sono tutte del tipo $(-2\gamma, 0, \gamma)$ e quindi proporzionali al vettore $(-2, 0, 1)$.
Questo prova che c'è un'unica direzione perpendicolare ad entrambe le rette.
Per cercare allora la minima distanza fra le due rette possiamo semplicemente scegliere un punto qualsiasi P di r, un punto qualsiasi Q di s e proiettare il segmento $P - Q$ su questa direzione perpendicolare comune.
Se scegliamo $P = (1, 2, 3)$ e $Q = (1, 3, 1)$, abbiamo $P - Q = (0, -1, 2)$ e la proiezione cercata è data da

$$\frac{(0, -1, 2)(-2, 0, 1)}{(-2, 0, 1)(-2, 0, 1)}(-2, 0, 1) = \frac{2}{5}(-2, 0, 1)$$

e quindi la minima distanza cercata è $\frac{2}{5}\sqrt{5}$.

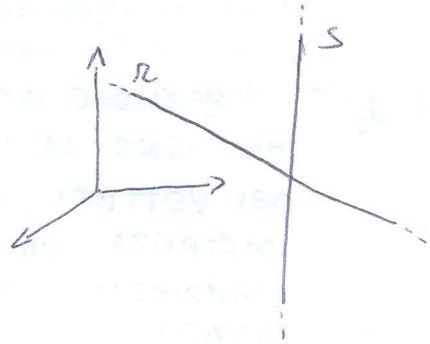
Il fatto che due rette sghembe abbiano un'unica direzione perpendicolare comune non riguarda solo l'esempio precedente.
Infatti, se due rette hanno vettori direzionali (a, b, c) e (d, e, f), le componenti di un vettore (x, y, z) perpendicolare ad entrambi devono soddisfare il sistema lineare omogeneo

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & cz & = & 0 \\ dx & + & ey & + & fz & = & 0 \end{array}$$

Si osservi che queste due equazioni rappresentano due piani passanti per l'origine, e siccome le due rette sono sghembe e quindi i vettori (a, b, c) e (d, e, f) non sono proporzionali, il sistema rappresenta una retta per l'origine.
Allora, se (x_0, y_0, z_0) è una soluzione non nulla, le soluzioni del sistema sono tutte del tipo $\lambda(x_0, y_0, z_0)$ e cioè proporzionali alla precedente e individuano quindi tutte una stessa direzione.
Questo prova che due rette sghembe hanno sempre un'unica direzione perpendicolare comune.

Foglio 1 27/04/16

Distanza tra due rette sghembe?



$$r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$s: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\pi_6: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = t l_1 + s l_2 \\ y = t m_1 + s m_2 \\ z = t n_1 + s n_2 \end{cases} \quad \begin{cases} t = \dfrac{x - s l_2}{l_1} \\ \dots \end{cases} \quad z = n_1 \frac{x}{l_1} + \frac{-n_1 l_2 y l_1 + n_1 l_2 x m_1}{l_1(l_1 m_2 - m_1 l_2)} + \frac{y l_1 n_2 - m_1 n_2 x}{l_1 m_2 - m_1 l_2}$$

(Non è la strada migliore...)

Problema in sospeso, trovare la funzione "distanza tra due punti qualsiasi" ~~d~~ e trovarne il minimo.

Studio di alcuni operatori definiti su uno spazio euclideo

Dato un operatore $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ spazio euclideo, si definisce operatore AGGIUNTO di T, l'applicazione LINEARE $T^*: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\forall u, v \in \mathbb{R}^n \quad T(u) \cdot v = u \cdot T^*(v)$

Vediamo alcuni casi particolari:

1) Sia $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ operatore biettivo, se il suo aggiunto è l'operatore inverso T^{-1}, cioè $T(u) \cdot v = u \cdot T^{-1}(v)$ $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$, $\Rightarrow T$ è detto operatore ISOMETRICO

2) Sia $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ operatore, se il suo aggiunto coincide con T, cioè $T(u) \cdot v = u \cdot T(v)$ $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow T$ è detto operatore SIMMETRICO

1) T operatore isometrico

[La METRICA è tutto ciò che riguarda: lunghezze, distanze, ampiezze degli angoli...

L'OPERATORE ISOMETRICO MANTIENE LA NORMA DEI VETTORI, LA DISTANZA TRA PUNTI, L'AMPIEZZA DEGLI ANGOLI

<u>Proposizione</u> 1) $T(u) \cdot T(v) = u \cdot v \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$

2) $\| T(u) \| = \| u \| \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$

3) $d(T(P), T(Q)) = d(P, Q) \quad \forall P, Q$ punti di $\mathbb{R}^n$

<u>Dim</u>

1) $$T(u) \cdot T(v) = u \cdot T^{-1}(T(v)) = u \cdot v$$

2) $$\| T(u) \| = \sqrt{T(u) \cdot T(u)} = \sqrt{u \cdot u} = \| u \|$$

3) $$d(T(P), T(Q)) = \| V_{T(Q)} - V_{T(P)} \| = \| V_Q - V_P \| = d(P, Q)$$

Dati i vettori $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $T(u)$, $T(v)$ loro immagini

$$\Rightarrow \cos \widehat{T(u)T(v)} = \frac{T(u) \cdot T(v)}{\|T(u)\| \|T(v)\|} = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \cos \widehat{uv}$$

<u>Proposizione</u> Se T è isometrico $\Rightarrow T^{-1}$ è isometrico

<u>Dim</u> Devo dimostrare che $\forall w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$

$T^{-1}(w_1) \cdot w_2 = w \cdot T(w_2)$ ~~Sappiamo che $\exists u_1 | T(u_1) = w_1$ e $u_2 | T(u_2) = w_2 \Rightarrow T^{-1}(T(u_1)) \cdot T(u_2) = u_1 \cdot T(u_2) \Rightarrow$~~

$= T(T^{-1}(w_1)) \cdot T(w_2)$

$= w_1 \cdot T(w_2) =$

c.v.d.

<u>Proposizione</u> Se U è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ invariante per T

$\Rightarrow$ è anche invariante per T^{-1}

<u>Dim</u> U invariante per $T \Rightarrow T(U) \subseteq U$ voglio dimostrare $T^{-1}(U) \subseteq U$

$T^{-1}(T(U)) = U$ perché T biettivo

$U = T^{-1}(T(U)) \subseteq T^{-1}(U) \Rightarrow U = T^{-1}(U)$

c.v.d.

Foglio 2 27/04/16

Proposizione Se U sottospazio invariante per T isometrico $\Rightarrow U^{\perp}$ è invariante per T

Dim Sia $u \in U$ e $w \in U^{\perp} \Rightarrow u \cdot w = 0$

$\Rightarrow$ Voglio dimostrare che $T(U^{\perp}) \subseteq U^{\perp}$

cioè che $T(w) \cdot u = 0 \quad \forall\, w \in U^{\perp}$ e $u \in U$

$\qquad \overset{\shortparallel}{w \cdot T^{-1}(u)}$ perché T è isometrico

ma U è invariante anche per T^{-1} e quindi

$T^{-1}(u) \in U \Rightarrow w \cdot T^{-1}(u) = 0$ c.v.d.

Quali sono i possibili autovalori reali di un operatore isometrico?

Sia λ autovalore di T e u, v suoi autovalori,

cioè $T(u) = \lambda u$ e $T(v) = \lambda v \Rightarrow T(u) \cdot T(v) = (\lambda u) \cdot (\lambda v) = \lambda^2 u \cdot v$

$\Rightarrow u \cdot v = \lambda^2 u \cdot v \quad \forall\, u, v$ autovettori di $\lambda \Rightarrow \boxed{\lambda^2 = 1} \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm 1}$

Proposizione Autovettori relativi ad autovalori diversi sono ortogonali

Dim Sia $u \mid T(u) = u$ e $v \mid T(v) = -v$

$\Rightarrow T(u) \cdot T(v) = u \cdot (-v) = -u \cdot v \Rightarrow u \cdot v = -(u \cdot v)$

poiché $u \neq 0$ $v \neq 0$ perché autovettori $\Rightarrow u \cdot v = 0$

c.v.d.

Fissiamo nello spazio vettoriale una base $B_{\perp n}$ ortonormale

$\Rightarrow$ dati u e v abbiamo $[v]_{B_{\perp n}} = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $[u]_{B_{\perp n}} = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow [T(u)]_{B_{\perp n}} = [T]_{B_{\perp n}} \cdot Y$ e analogamente

$\Rightarrow [T(v)]_{B_{\perp n}} = [T]_{B_{\perp n}} \cdot X \Rightarrow$ RICORDANDO L'ESPRESSIONE DEL PRODOTTO SCALARE TRAMITE LE COORDINATE E CHE IN UNA BASE $\perp_n$ LA MATRICE ASSOCIATA AL PRODOTTO SCALARE È I, SI HA:

$\Rightarrow T(v) \cdot T(u) = ([T]_{B_{\perp n}} X)^T I ([T]_{B_{\perp n}} Y) = X^T [T]^T_{B_{\perp n}} [T]_{B_{\perp n}} Y$

$\shortparallel$

$v \cdot u = X^T I Y = X^T Y$

$\Rightarrow x^T y = x^T [T]_{B\perp n}^T [T]_{B\perp n} \cdot y \qquad \underline{\forall x, y \in \mathbb{R}^n}$

$\Rightarrow [T]_{B\perp n}^T [T]_{B\perp n} = I \Rightarrow [T]_{B\perp n}$ è <u>ortonormale</u>

POICHÉ $[T]_{B\perp n}^T = [T]_{B\perp n}^{-1}$

RICORDO CHE IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE ORTOGONALE È +1 O −1:

Pongo $A = [T]_{B\perp n} \Rightarrow$ poiché $A^T A = I \Rightarrow |A^T A| = |I| = 1$

$\Rightarrow |A^T| \cdot |A| = 1 \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow \boxed{|A| = \pm 1}$ c.v.d

Le radici caratteristiche reali di A sono ± 1.