 26/10/15

Sia V spazio vettoriale sul campo K; indico un suo sottospazio W in questo modo: $W \leq V$.

DEFINIZIONE: ~~Un insieme di~~ I vettori $v_1, \dots, v_k \in V$ sono detti generatori di V se V è definito mediante le COMBINAZIONI LINEARI di tali vettori cioè se $\forall v \in V \ \exists \ \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$ tali che $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$

Esempio: Sia $V = \mathbb{R}^2$ $K = \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ considero i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

I vettori v_1, v_2, v_3 generano $\mathbb{R}^2$?

dato $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \exists \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tali che $v = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j v_j$?

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 \\ y = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 \end{cases}$$

a questo punto bisogna vedere se il sistema ha soluzione

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x + \alpha_2 - 2\alpha_3 \\ y = 2x + 2\alpha_2 - 4\alpha_3 - \alpha_2 + 3\alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -x + y - \alpha_3 \\ \alpha_2 = y - 2x + \alpha_3 \end{cases}$$

Il sistema ha soluzione, indipendentemente da x e y

ha soluzione $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (retta in $\mathbb{R}^3$) E QUINDI OGNI VETTORE $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ SI SCRIVE COME COMBINAZIONE LINEARE DEI TRE VETTORI DATI

SE AD esempio: PRENDO $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e considero $\alpha_3 = 0$ NEL SISTEMA DI PRIMA $\Rightarrow$ PER I SEGUENTI VALORI: $x = 0$ e $y = 2$ SI OTTIENE $\alpha_1 = 2$ $\alpha_2 = 2$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

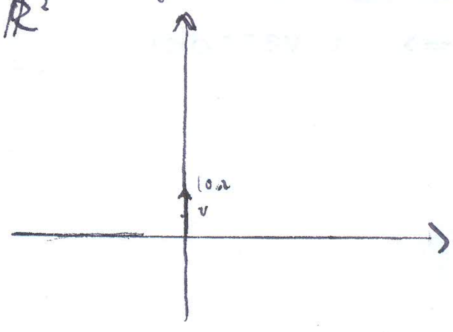
Dato $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ Cerco il sottoinsieme W di $\mathbb{R}^2$ "generato" da v

Cerco tutte le combinazioni lineari del vettore v.

$W = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle =$ Il sottoinsieme formato (DAI MULTIPLI) del vettore v in $\mathbb{R}^2$

$= L\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

W retta di $\mathbb{R}^2$; $x = 0$ (tutto l'asse y)



Considero $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ e $W = \langle\langle v_1, \dots, v_k \rangle\rangle \Rightarrow W < \mathbb{R}^n$?

$W = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\} \Rightarrow 0 \in W$? Si, basta prendere $\alpha_j = 0 \ \forall j$

Dati $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$?

$\Rightarrow \begin{array}{l} w_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \\ w_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_k v_k \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} w_1 + w_2 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k = \\ = (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + (\alpha_2 + \beta_2) v_2 + \dots + (\alpha_k + \beta_k) v_k \end{array}$

Dati $\alpha \in \mathbb{R}$ e $w \in W \Rightarrow \alpha w \in W$? $\Rightarrow w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$

$\Rightarrow \alpha w = \alpha\alpha_1 v_1 + \alpha\alpha_2 v_2 + \dots + \alpha\alpha_k v_k$

Esiste un numero minimo di vettori generatori per definire uno spazio? Se sì, quanto vale?

DEFINIZIONE:

Dato uno spazio vett V su un campo $K \Rightarrow$ i vettori $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ sono detti LINEARMENTE INDIPENDENTI se e solo se:

$0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$;

Se non accade ciò, i vettori sono detti LINEARMENTE DIPENDENTI.

Da dimostrare: ① $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0 \Rightarrow 0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$ BANALE

② $0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ DA DIMOSTRARE

Bisogna CERCARE: se ci sono valori di $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k$ diversi da 0 che risolvono il sistema: SE NON CI SONO $\Rightarrow v_1, \dots, v_k$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

Esempio: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ verifico che siano linearmente indipendenti

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ è necessario risolvere il sistema

$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -3\alpha_3 \\ \alpha_2 = \alpha_3 \end{cases}$

La terna $(-1, 1, 1)$ è soluzione del sistema

$\Rightarrow$ I VETTORI $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ SONO LIN. DIPENDENTI

Foglio 2 26/10/15

Definizione: Si dice BASE di uno spazio vett V, l'insieme di vettori che determinano il numero minimo di generatori, linearmente indipendenti di V.

Esempio: $\mathbb{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ è base di $\mathbb{R}^2$?

1) Sono linearmente indipendenti?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Sistema omogeneo, Si può scrivere la matrice dei soli coef.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\det \neq 0 \rightarrow Rg = 2$, Spazio delle soluzioni $= 2 - 2 = 0$ ha soluzione.

$\text{Dim Sol } \Sigma_0 = 0 \Rightarrow 0 \in \text{Sol } \Sigma_0$ v_1, v_2 sono lin. indip.

2) Sono generatori?

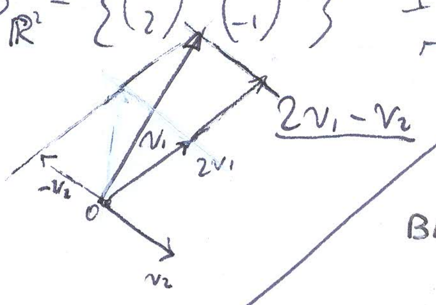
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = x \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 2 & -1 & y \end{array}\right) \overset{2R_1 - R_2 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & -1 & 2x-y \end{array}\right) \overset{R_1 - R_2 \Rightarrow R_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -x+y \\ 0 & 1 & -2x+y \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = y - x \\ \alpha_2 = y - 2x \end{cases}$$ Si, sono generatori.

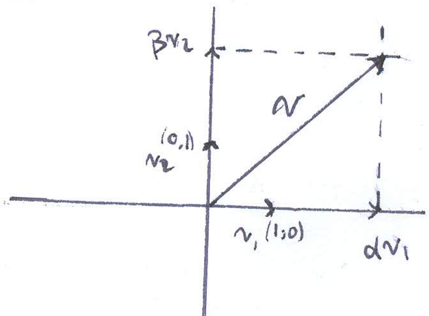
I vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ~~formano~~ costituiscono una base in $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \mathbb{B}_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ I due vettori non giacciono sulla stessa retta per l'origine PERCHE' NON SONO MULTIPLI



$\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^2$



$$v = \alpha v_1 + \beta v_2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$: I COEFFICENTI DELLA COMBINAZIONE LINEARE COINCIDONO CON LE COORDINATE.

IN OGNI SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{R}^n$ SI PUÒ DARE LA BASE CANONICA

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$; DIMOSTRARE CHE È BASE!

Definizione: Data una base $\mathbb{B}_V$ di uno spazio vettoriale V,

$\mathbb{B}_V = \{v_1, \dots, v_k\}$ => se $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$

=> l'$\cancel{K}$-upla $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ fornisce le COORDINATE di v nella base $\mathbb{B}_V$

=> scriviamo $[v]_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$

Le coordinate di $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ NELLA BASE canonica sono $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

=> se prendo $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ quali sono le coordinate di $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ in tale base?