25 Maggio 2016

Cenni sugli spazi proiettivi

Sia V uno spazio vettoriale n-dimensionale.
Definiamo una relazione tra i vettori di V; $v \neq 0$;:
$v_1 \mathcal{R} v_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ tale che $v_2 = \lambda v_1$.
Tale relazione è di equivalenza, poiché ogni vettore è in relazione con se stesso, vale la proprietà simmetrica. Inoltre tale relazione gode delle proprietà: riflessiva, simmetrica e transitiva; Es: Transitiva: se $v_1 \mathcal{R} v_2$ e $v_2 \mathcal{R} v_3 \Rightarrow v_1 \mathcal{R} v_3 \Rightarrow \exists \lambda \neq 0 \mid v_2 = \lambda v_1$ ed $\exists \mu \mid v_3 = \mu v_2 \Rightarrow \exists \nu$ tale che $v_3 = \nu v_1$?
Sì, poiché $v_3 = \mu v_2 = \mu \lambda v_1 \longrightarrow$ basta prendere $\nu = \lambda \mu$.
Ogni classe di equivalenza rappresenta un punto dell'insieme quoziente che sarà il nostro spazio proiettivo. Dato dunque un punto P dello spazio proiettivo, $\mathbb{P}(V)$, consideriamo un suo rappresentante, v, $\Rightarrow P = [v]$. Data una base $\mathcal{B}$ di V, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, con $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ coordinate di v nella base $\mathcal{B}$.

$\Rightarrow$ posso indicare con $[x_1, \dots, x_n]$ le coordinate di P in $\mathbb{P}(V)$; tali coordinate non sono univoche, ma sono definite a meno di un fattore, infatti se considero un altro rappresentante di P,

$w \implies w = \lambda v \implies$ quindi le coordinate di w nella base $\mathcal{B}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = [w]_{\mathcal{B}}$, sono tali che $y_j = \lambda x_j \ \forall j$.

K punti in $\mathbb{P}(V)$ sono detti <u>linearmente indipendenti</u> se i rispettivi vettori sono linearmente indipendenti.

Se $K > n \implies K$ punti di $\mathbb{P}(V)$ si dicono in <u>POSIZIONE GENERALE</u> se ogni sottoinsieme dei K vettori, formato da n vettori, è costituito da vettori linearmente indipendenti.

Se V ha dimensione $n \implies \mathbb{P}(V)$ ha dimensione $n-1$.

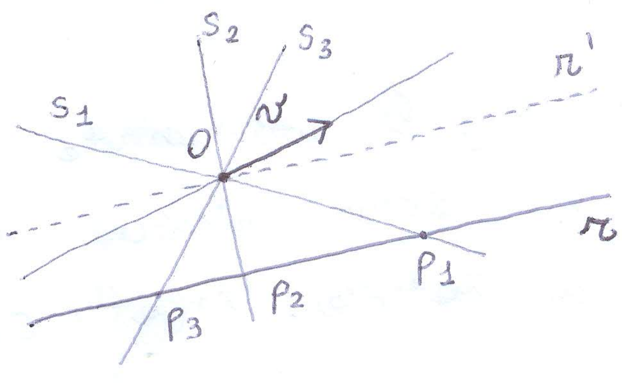
ESEMPIO:

$\mathbb{P}(\mathbb{R})$: in $\mathbb{R}$ tutti i vettori sono multipli di 1 e tutti questi si riducono ad un unico punto.

$\mathbb{P}(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^0 = [x]$. Se $\lambda \neq 0$ se si prende come vettore di partenza l'origine nella sua classe di equivalenza ci sarà solo TALE VETTORE.

Per questo a V si toglie l'origine!

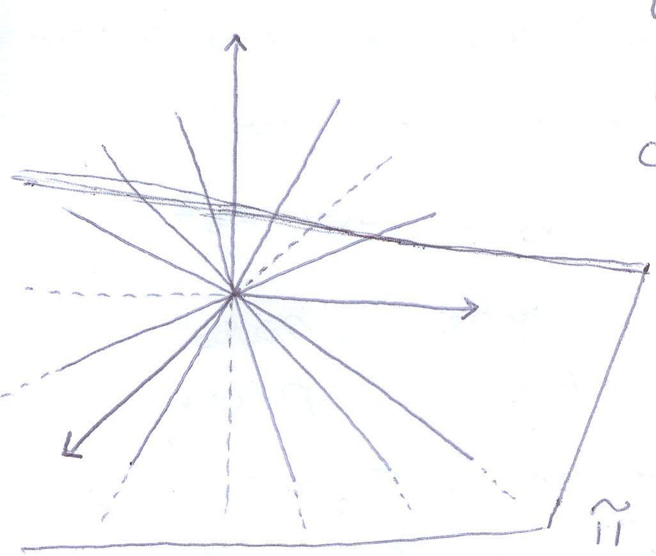
Sia ora $\mathbb{R}^2 - \{0\} \implies$ Cerco $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{P}^1$



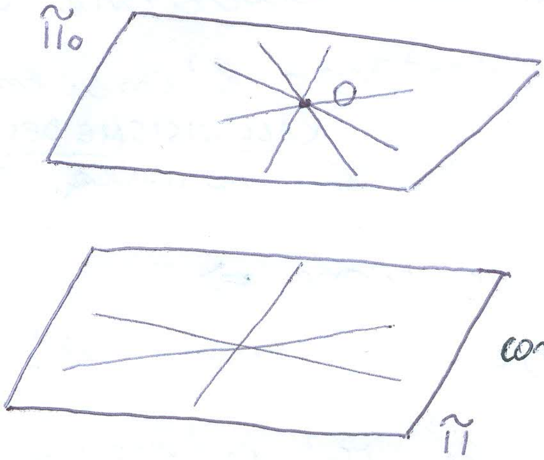
Tutte le rette del fascio incontrano la retta r in un punto tranne la retta parallela passante per O (r') CON $r' \parallel r$

DUNQUE:
Ogni classe di equivalenza è in relazione con un punto della retta r, pertanto l'insieme delle classi di equivalenza corrisponde ~~della~~ ALL'INSIEME DEI PUNTI retta;
r e r' hanno la stessa direzione $\Rightarrow$
Aggiungo alla retta affine r un punto all'infinito e posso dire quindi che r' interseca r in un punto all'infinito: la <u>retta proiettiva</u> è in qualche modo una circonferenza poiché è chiusa in un punto posto all'infinito.
La parte che viene disegnata è logicamente quella affine, l'infinito viene escluso. SI DIMOSTRA CHE $\mathbb{P}^1$ è omeomorfo ad una circonferenza.

Sia ora $V = \mathbb{R}^3 - \{0\}$



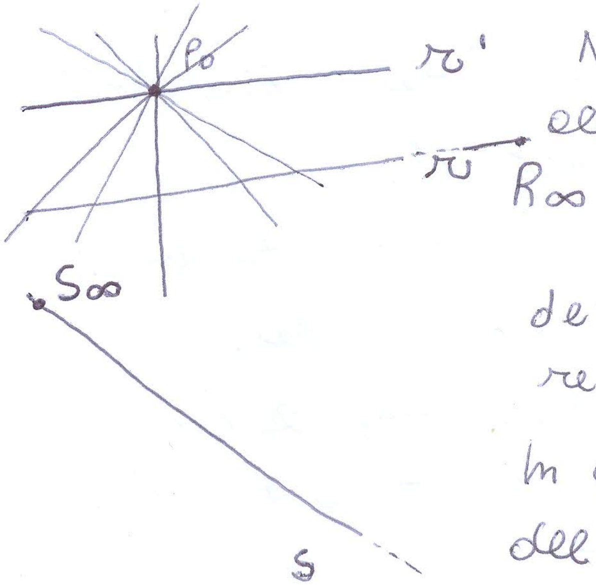
Interseco ogni retta della stella con un piano $\tilde{\pi}$.
Ogni retta rappresenta una classe di equivalenza.
$\exists$ corrispondenza tra le classi del piano proiettivo e i punti del piano $\tilde{\pi}$.



Le rette che giacciono sul piano π_0 parallelo al piano π non intersecano π: quindi non hanno corrispondenza con punti di π.

Aggiungo al piano una retta proiettiva all'infinito: il piano viene in pratica chiuso con la retta (che è una curva chiusa) la quale all'infinito ha un punto in cui si chiude.
$\mathbb{P}^2$ è omeomorfo a una superficie sferica.
Quello che noi rappresentiamo del piano proiettivo è sempre il piano affine.

Il piano proiettivo come un piano affine ampliato con elementi impropri.



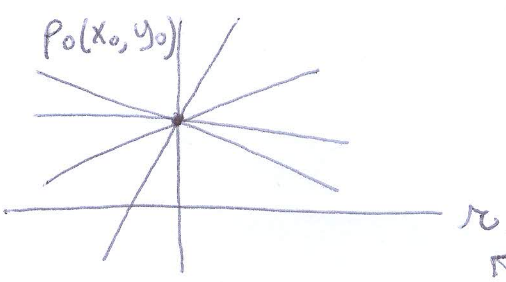
Nel piano ogni retta ha un punto all'infinito in più.

I punti all'∞ di ogni retta determinano una retta che sarà la retta all'infinito del piano.
In questo modo non c'è più l'idea del parallelismo; due rette parallele all'infinito si incontrano sempre. Due rette nel piano proiettivo hanno SEMPRE intersezione.

Ad ogni punto P del piano affine di coordinate $\binom{x}{y}$ associo tre numeri, una terna ordinata di numeri, (x_1, x_2, x_3) in modo che supposto $x_3 \neq 0$ $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$. La terna $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ nuovamente dà (x, y) perchè $x = \frac{\lambda x_1}{\lambda x_3}$ e $y = \frac{\lambda x_2}{\lambda x_3}$

Se $x_3 = 0$, caratterizza i punti impropri, cioè all'infinito.

$\Rightarrow$ le terne $[x, y, 1]$ rappresentano il punto del piano affine di coordinate (x, y), mentre i punti $[x_1, x_2, 0]$ stanno all'infinito.



$\lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) = 0$
equazione del fascio di rette per P_0.

$ax + by + c = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda x + \mu y = c_1 \\ ax + by = c \end{cases}$ Sistema con rango 2 che dovrà avere sempre soluzione. $\Rightarrow$ $x = \dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & \mu \\ c & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ a & b \end{vmatrix}}$ e $y = \dfrac{\begin{vmatrix} \lambda & c_1 \\ a & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ a & b \end{vmatrix}}$

$\Rightarrow$ le coordinate $[x_1, x_2, x_3]$ si dicono coordinate omogenee del punto P del piano proiettivo.

$\Rightarrow$ le coordinate omogenee sono $x_1 = \begin{vmatrix} c_1 & \mu \\ c & b \end{vmatrix}$, $x_2 = \begin{vmatrix} \lambda & c_1 \\ a & c \end{vmatrix}$, $x_3 = \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ a & b \end{vmatrix}$

Se $\det[X_3] = 0$ le rette sono //.