23/09/2015

La prima parte del corso sarà di ALGEBRA LINEARE mentre la seconda parte RIGUARDERÀ SPAZIO EUCLIDEO.

insieme $\longrightarrow$ campo $\longrightarrow$ spazio vettoriale

EQUAZIONE DI PRIMO GRADO: i singoli monomi devono contenere variabili il cui grado massimo sia 1. È detta anche lineare.

Un'equazione di n variabili a coefficienti reali è del tipo: (utilizzando una forma più generica possibile)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

oppure può essere scritto utilizzando la SOMMATORIA (Σ)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \longrightarrow \text{detto TERMINE NOTO} \begin{cases} b=0 \Rightarrow \text{L'EQUAZIONE È omogenea} \\ b\neq 0 \Rightarrow \text{L'EQUAZIONE È non omogenea} \end{cases}$$

SISTEMA LINEARE è composto da equazioni lineari

Un sistema lineare di p equazioni in n variabili non omogeneo

DEFINIZIONE: Un sistema è omogeneo se tutte le equazioni sono omogenee

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \alpha \\ \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = \beta \\ \vdots \end{cases}$$

oppure può essere riscritto così:

Il primo indice segna l'equazione, il secondo indica il POSTO OCCUPATO del coefficiente.

(oppure così a_1^1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

VOGLIO studiare i sistemi
- $\rightarrow$ cosa significa?
- $\rightarrow$ come fare?
- $\rightarrow$ perché?

Studiare significa trovare le SOLUZIONI. Nel caso precedente una soluzione è una ENNUPLA. Sostituendo le soluzioni l'equazione diventa un'identità.

Esiste la soluzione? Se il sistema è non omogeneo la soluzione non esiste sempre (può non esistere)

ex. (per smentire un'affermazione basta trovare un controesempio numerico)

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y=1 \end{cases}$$ sistema lineare non omogeneo di due equazioni in due incognite

Risolvendola per sostituzione

$\Longrightarrow$: implica

$$\begin{cases} x=-y \\ -2y+2y=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-y \\ 0=1 \end{cases}$$ è un ASSURDO, sistema IMPOSSIBILE

Se il sistema è omogeneo esiste sempre (almeno) una soluzione ossia una ennupla i cui elementi sono tutti 0. Esiste sempre la soluzione nulla

indica il sistema omogeneo $\longrightarrow$ $\Sigma_0 \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = 0 \\ \vdots \end{cases}$

L'insieme delle soluzioni del SISTEMA Σ_0 SI INDICA $Sol\ \Sigma_0$

In questo caso:

$$(0, \dots, 0) \in Sol\ \Sigma_0$$

"Proviamo a risolvere" il sistema con il ~~sis~~ metodo di ELIMINAZIONE DI GAUSS

Attraverso questo metodo si cambiano le equazioni del sistema. Pur essendo diverso è $\boxed{\text{EQUIVALENTE}}$ ossia ha le stesse soluzioni

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y=1 \end{cases} \xRightarrow{(-2)Eq_1} \begin{cases} -2x-2y=0 \\ 2x+2y=1 \end{cases} \xRightarrow{Eq_2+Eq_1} \begin{cases} x+y=0 \\ 0+0=1 \end{cases} \text{ impossibile}$$

Questo metodo mira via a via ad eliminare LA variabile x_1 NELLE EQUAZIONI DALLA 2ª IN POI, LA VARIABILE x_2 DALLA 3ª IN POI, LA VARIABILE x_3 DALLA 4ª IN POI, E COSÌ VIA.

ex.

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=1 \\ -x+y \quad\ \ =2 \end{cases} \xRightarrow[Eq_3+Eq_1]{Eq_2-2Eq_1} \begin{cases} x+y-z=0 \\ -3y+3z=1 \\ 2y-z=2 \end{cases} \xRightarrow{2Eq_2+3Eq_3} \begin{cases} x+y-z=0 \\ -3y+3z=1 \\ 3z=8 \end{cases}$$

Questa prima parte È DETTA "in discesa". I PRIMI coefficienti non nulli DI OGNI equazione DEL SISTEMA OTTENUTO AL TERMINE della parte in discesa, sono detti $\boxed{\text{PIVOT}}$. Individuati questi ultimi si procede a ritroso dall'ultima equazione con pivot. Iterando questo processo si vuole arrivare ad ottenere un SISTEMA IN CUI LE VARIABILI DEI PIVOT SONO PRESENTI OGNUNA IN UNA EQUAZIONE DIVERSA