ESEMPIO DI FORMA BILINEARE

23/03/2016

Sia $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to |A|$

$\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}\right) \mapsto |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

→ Si dimostra che è una forma bilineare. Questo accade solo per matrici $M_{2\times2}$, vedendo le colonne di A come vettori di $\mathbb{R}^2$.

$d\left(\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \alpha\, d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$ Vero perché moltiplicando per uno scalare una riga od una colonna di una matrice, il determinante viene moltiplicato per quello scalare.

E inoltre: $d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) + d\left(\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$ Vero.

QUINDI POSSIAMO dimostrare che è una forma bilineare (il det. di una matrice $M_{2\times2}$).
In generale il determinante è una ~~funzione~~ Forma multilineare. (ESERCIZIO)

A partire da una qualunque forma bilineare, si può ricavare una forma quadratica:

Esempio: Sia $G: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto x_1y_1 + x_2y_1 + x_2y_2$ (Dimostrare che è una forma bilineare).

⇒ Si vuole DETERMINARE una forma quadratica: si fissa la base canonica e in $\mathbb{R}^2$ ⇒ $[G]_e$:

$[G]_e = \begin{pmatrix} G(e_1,e_1) & G(e_1,e_2) \\ G(e_2,e_1) & G(e_2,e_2) \end{pmatrix} \to \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \mapsto 1$; $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \mapsto 0$; $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \mapsto 1$;

$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \mapsto 1 \Rightarrow [G]_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (Si nota che non è simmetrica ⇒ non è una forma simmetrica)

PER DETERMINARE IN MODO PRATICO LA FORMA QUADRATICA CALCOLIAMO $(x_1 x_2)[G]_e\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{array}{c|cc|} & x_1 & x_2 \\ \hline x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 1 \end{array} = x_1^2 + 0x_1x_2 + x_2x_1 + x_2^2 = x_1^2 + x_2x_1 + x_2^2 \Rightarrow Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1, x_2)[G]_e\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2, x_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2x_1 + x_2^2$

(LE ENTRATE a_{ij} SONO I COEFFICIENTI DEI CORRISPONDENTI MONOMI x_ix_j CHE FORMIAMO DANDO IDEALMENTE ⊛ LE ETICHETTE x_i A RIGHE E COLONNE DELLA MATRICE.

(Dimostrare che $Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è forma quadratica).

Data $Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ ⇒ Ricavare F_Q (forma polare) tale che $F_Q(v,v) = Q(v)$

$$F_Q(v,w) = \frac{Q(v+w) - Q(v) - Q(w)}{2}$$

$F_Q: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{v}, \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{w}\right) \mapsto \dfrac{Q\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} - Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - Q\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2}[(x_1+y_1)^2 + (x_1+y_1)(x_2+y_2) + (x_2+y_2)^2 - x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 -$

$- y_1^2 - y_1y_2 - y_2^2] = \frac{1}{2}[\cancel{x_1^2} + \cancel{y_1^2} + 2x_1y_1 + \cancel{x_1x_2} + x_1y_2 + y_1x_2 + \cancel{y_1y_2} + \cancel{x_2^2} + \cancel{y_2^2} + 2x_2y_2 - \cancel{x_1^2} - \cancel{x_1x_2} - \cancel{x_2^2} - \cancel{y_1^2} - \cancel{y_1y_2} - \cancel{y_2^2}] =$

$= \frac{1}{2}[2x_1y_1 + x_1y_2 + y_1x_2 + 2x_2y_2]$

PRATICAMENTE DETERMINIAMO LA FORMA POLARE CONSIDERANDO I VETTORI $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$[Q]_e = \begin{array}{c|cc|} & x_1 & x_2 \\ \hline x_1 & 1 & 1/2 \\ x_2 & 1/2 & 1 \end{array}$ (Matrice associata alla forma polare nella base canonica) $\Rightarrow \begin{array}{c|cc|} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & 1 & 1/2 \\ x_2 & 1/2 & 1 \end{array} \Rightarrow$ CON LE STESSE CONSIDERAZIONI DI ⊛ METTENDO LE "ETICHETTE" x_i ALLE RIGHE E y_j ALLE COLONNE SI OTTIENE LA FORMA BILINEARE

$\Rightarrow F_Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + x_2y_2$

Teorema di SILVESTER o teorema d'inerzia per le forme quadratiche REALI (o per forme bilineari simmetriche reali):

Data $F: V\times V \to \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica su V sp. vett. n-dimensionale $\Rightarrow \exists$ una base $B_\perp$ F-ortogonale di V tale che

$$[F]_{B_\perp} = \begin{array}{c} \\ p \\ \\ r \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & 0 \\ & & 1 & & & \\ & 0 & & -1 & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

dove $r = rk F$. Il numero $p = \#$ termini positivi sulla diagonale è un invariante di F e quindi della forma quadratica ad essa associata; p è detto <u>INDICE D'INERZIA POSITIVO</u> di F (o di Q). Il numero $q = r-p = \#$ elementi negativi sulla diagonale è anch'esso un invariante di F (e quindi di Q). (essendo il rango r invariante): q è detto <u>INDICE D'INERZIA NEGATIVO</u> di F (e quindi di Q). La coppia (p,q) è detta <u>SEGNATURA della forma quadratica</u> Q.

<u>Dimostrazione</u>: Si sa che esiste una base di V, $B = \{v_1,\dots,v_n\}$ F-ortogonale $\Rightarrow [F]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

è diagonale e r fra gli elementi della diagonale sono $\neq 0$ poiché $rk[F]_B = r$.

Supponiamo che $a_{ii} > 0 \ \forall i = 1,\dots,p$ e $a_{ss} < 0 \ \forall s = p+1,\dots,r$, inoltre $a_{ll} = 0 \ \forall l = r+1,\dots,n$.

$\Rightarrow \exists \alpha_i$, $i = 1,\dots,p$ tali che $\alpha_i^2 = a_{ii}$ ed $\exists \beta_s$, $s = p+1,\dots,r \mid \beta_s^2 = -a_{ss} \Rightarrow$ Formo una nuova base di V,

$B_\perp = \left\{\frac{v_1}{\alpha_1}, \frac{v_2}{\alpha_2}, \dots, \frac{v_p}{\alpha_p}, \frac{v_{p+1}}{\beta_{p+1}}, \dots, \frac{v_r}{\beta_r}, v_{r+1},\dots,v_n\right\}$

$\Rightarrow [F]_{B_\perp} = \begin{pmatrix} b_{11}=1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & b_{pp} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$: $b_{11} = F\left(\left(\frac{v_1}{\alpha_1}, \frac{v_1}{\alpha_1}\right)\right) = \frac{1}{\alpha_1^2} F((v_1,v_1)) = \frac{a_{11}}{\alpha_1^2} = 1$, $\Rightarrow b_{ii} =$

$= F\left(\left(\frac{v_i}{\alpha_i}, \frac{v_i}{\alpha_i}\right)\right) = \frac{1}{\alpha_i^2} F(v_i,v_i) = \frac{a_{ii}}{\alpha_i^2} = 1 \ \forall i = 1,\dots,p$

$\forall s = p+1,\dots,r$ $b_{ss} = F\left(\left(\frac{v_s}{\beta_s}, \frac{v_s}{\beta_s}\right)\right) = \frac{1}{\beta_s^2} F((v_s,v_s)) = \frac{a_{ss}}{\beta_s^2} = -1$, $\forall l = r+1,\dots,n$ $F((v_l,v_l)) = 0$

$$\Rightarrow [F]_{B_\perp} = \begin{array}{c} \\ p \\ \\ r \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Osservazione: Se $[Q]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & \ddots & a_{ss} & \\ 0 & & \ddots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow Q\left(\begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}\right) = \sum_{s=1}^{n} a_{ss} x_s^2$: FORMA CANONICA DELLA FORMA QUADRATICA: SONO PRESENTI SOLO I QUADRATI DELLE COORDINATE DELLO SPAZIO VETTORIALE.

Otteniamo una <u>forma canonica della forma quadratica</u>. La ricerca della forma canonica coincide con la ricerca della base ortogonale dello spazio vettoriale.

Nel caso del teorema di Silvester $\Rightarrow Q\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = \tilde{x}_1^2 + \dots + \tilde{x}_p^2 - \tilde{x}_{p+1}^2 - \dots - \tilde{x}_r^2$

DIMOSTRIAMO ORA CHE "P" È INVARIANTE PER Q:

Per assurdo supponiamo che $\exists$ una base di V, B', F-ortogonale / se $(y_1,\dots,y_n)$ sono le coordinate nella base B' $\Rightarrow Q\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_t^2 - y_{t+1}^2 - \dots - y_r^2$ con $t \neq p$: supponiamo $t < p$

Sia $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ mentre $B_\perp = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\Rightarrow$ siano $U = \langle\langle v_1, \dots, v_p \rangle\rangle$ e $W = \langle\langle w_{t+1}, \dots, w_n \rangle\rangle$

$\Rightarrow$ so che $\dim(U+W) = \overset{=p}{\dim U} + \underbrace{\dim W}_{=n-t} - \underbrace{\dim U \cap W}_{=0}$. Considero $U \cap W$ $\Rightarrow$ Sia $v \in U \cap W$, $v \neq 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow Q(v) = Q(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_p v_p) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 > 0$

$Q(v) = Q(y_{t+1} w_{t+1} + y_{t+2} w_{t+2} + \dots + y_n w_n) = -\sum_{s=t+1}^{n} y_s^2 < 0$ Assurdo $\Rightarrow v = 0$

$\Rightarrow$ non può essere $t < p$

$\Rightarrow$ supponiamo $t > p$, ma si arriva ancora all'assurdo: $\dim U + W > n$

$\Rightarrow \boxed{t = p}$

$\square$ cvd

Qual è la segnatura di una forma quadratica definita positiva? (per casa)