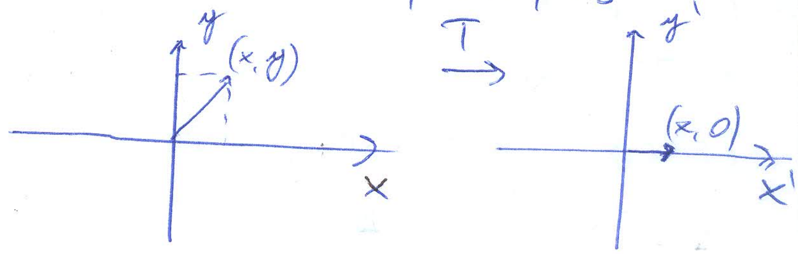
21/12/15

Sia $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longmapsto (x, 0)$



$\exists$ sottospazi invarianti? 1) V_1 = asse Ox: $y = 0$ $\quad T(v) = v \ \forall v \in V_1$

$(x, 0) = (x, 0)$

Cerco fra i sottospazi V di grado 1 quelli per cui $T(V) \subseteq V$

2) V_2 = asse Oy: $x = 0$ $\quad T(v) \in V_2 \ \forall v \in V_2$

$T(0, y) = (0, 0)$

$(0, 0) \in \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$

Sono invarianti anche $V = \{0\}$, e $V = \mathbb{R}^2$

Proposizione:

Sia $T : V \longrightarrow V$ operatore biettivo $\Rightarrow \exists\, T^{-1}$.

Se $W \subseteq V$, W invariante per $T \Rightarrow W$ è invariante per T^{-1}

Dim: per ipotesi $T(W) \subseteq W$ cioè $\forall w \in W \ T(w) \in W \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \tilde{w} \in W$ tale che $T(w) = \tilde{w} \Rightarrow$ considero T^{-1}

$$T^{-1}(T(w)) = T^{-1}(\tilde{w}) \Rightarrow w = T^{-1}(\tilde{w}) \in W$$

cvd

Problema: com'è la matrice associata a $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ operatore in una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ in cui i primi k vettori sono presi in un sottospazio invariante rispetto a T

$$\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_k, v_1, \dots, v_{n-k}\}$$ con $w_1, \dots, w_k$ base sottospazio invariante W

$$\underbrace{T(w_1)}_{\text{è combinazione lineare dei vettori della base di } W} = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k + 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_{n-k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \alpha_1 & \beta_1 & \dots & \omega_1 & \theta_1 & \dots & \Gamma_1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_k & \beta_k & \dots & \omega_k & \theta_k & \dots & \Gamma_k \\ \hline 0 & 0 & & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & & & \\ 0 & 0 & & 0 & \theta_n & \dots & \Gamma_n \end{array}\right)$$

zeri dalla k-esima riga nei vettori $\in W$

scalari per vettori $\notin W$

1

CONSIDERIAMO PARTICOLARI SOTTOSPAZI INVARIANTI ASSOCIATI A T OPERATORE

CERCO SOTTOSPAZI DI V, I CUI VETTORI MANDA PER IMMAGINE MULTIPLI DI SE STESSI, CERCANDO UN COEFFICIENTE λ FISSATO $\forall$ VETTORE DEL SOTTOSPAZIO cioè:

CERCO I $v \in W$, TALI CHE $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$, CON $T(v) = \lambda(v)$

TALI VETTORI SONO DETTI AUTOVETTORI DELL'OPERATORE T RELATIVI A λ

LO SCALARE λ È DETTO AUTOVALORE

IL SOTTOSPAZIO GENERATO DA TALI AUTOVETTORI É DETTO AUTOSPAZIO DI T RELATIVO ALL'AUTOVALORE λ

SARÁ INDICATO: $E_\lambda(T)$.

PROPOSIZIONE: $E_\lambda(T)$ È UN SOTTOSPAZIO INVARIANTE PER T.

DIM: DIMOSTRIAMO CHE: $T(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$:

CONSIDERO $v \in E_\lambda \Rightarrow T(v) = \lambda v \;\; \forall v \in E_\lambda$

E_λ È SOTTOSPAZIO QUINDI $\lambda v \in E_\lambda$

$\Rightarrow T(v) \in E_\lambda \;\; \forall v \in E_\lambda$

c.v.d.

IMPORTANTE: IL VETTORE NULLO "0" NON È AUTOVETTORE PER DEFINIZIONE, TUTTAVIA ESSO APPARTIENE ALL'AUTOSPAZIO:

$0 \in E_\lambda$

$\exists$ SOTTOSPAZI INVARIANTI CHE NON SONO AUTOSPAZI RELATIVI AD ALCUN AUTOVALORE:

CERCHIAMO CONTROESEMPI:

PENSIAMO ALL'OPERATORE $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) \longmapsto (x, y, -z)$

CERCHIAMO I SOTTOSPAZI INVARIANTI: TRA QUESTI ALCUNI NON SONO AUTOSPAZI? (FARE)

PROPOSIZIONE: SIA $T: V \to V$ OPERATORE e v AUTOVETTORE DI $T \Rightarrow \exists$ UN UNICO $\lambda \in \mathbb{R} \mid T(v) = \lambda v$

DIM: PER ASSURDO SUPPONIAMO $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$, TALE CHE $T(v) = \lambda_1 v$, $T(v) = \lambda_2(v)$

$\lambda_1 v = \lambda_2 v \Rightarrow \lambda_1 v - \lambda_2 v = 0 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot v = 0$

MA $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow$ PER ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO $v = 0$

MA $v \neq 0$ PER IPOTESI IN QUANTO AUTOVETTORE.
SI PERVIENE ALL'ASSURDO.

cvd

ESISTONO INFINITI AUTOVETTORI RELATIVI AD UN FISSATO AUTOVALORE λ: INFATTI

OSSERVAZIONE: SIA $T(v) = \lambda \cdot v \Rightarrow$ preso $w \in$ RETTA GENERATA DA v, CIOÈ $w = k v$, $\Rightarrow T(w) = T(kv) =$
$= k T(v) = k \lambda v = \lambda(kv) = \lambda w \Rightarrow T(w) = \lambda w$.

PROPOSIZIONE: AUTOVETTORI RELATIVI AD AUTOVALORI DIVERSI SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI:

DIM: SIANO $v_1, v_2, \dots, v_k$ AUTOVETTORI di $T: V \to V$ TALI CHE $T(v_j) = \lambda_j v_j$ CON $\lambda_i \neq \lambda_l$ $\forall i, l = 1, \dots, k$ $i \neq l$.

PRENDO $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots \alpha_k v_k = 0$ (■)

$T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = 0 \Rightarrow \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_k T(v_k) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k = 0$ $*$

RAGIONIAMO PER INDUZIONE SUL NUMERO DI AUTOVETTORI

VERIFICHIAMO PER $k = 1 \Rightarrow v$ AUTOVETTORE LINEARMENTE INDIPENDENTE CON SE STESSO.

SUPPONIAMO LA PROPOSIZIONE VERA $\forall m \leq k-1$ E DIMOSTRIAMOLA PER $m = k$.

ORA ~~moltiplico~~ MOLTIPLICO L'EQUAZIONE $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ PER $\lambda_k \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 \lambda_k v_1 + \alpha_2 \lambda_k v_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k = 0$ *

A ESSA SOTTRAGGO *: $\alpha_1 \lambda_k v_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k - (\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k) = 0$

RACCOLGO:

$$(\alpha_1 \lambda_k - \alpha_1 \lambda_1) v_1 + \dots + (\alpha_{k-1} \lambda_k - \alpha_{k-1} \lambda_{k-1}) v_{k-1} +$$

$$+ (\underbrace{\cancel{\alpha_k \lambda_k - \alpha_k \lambda_k}}_{0}) \cdot v_k = 0$$

$$\alpha_1 (\lambda_k - \lambda_1) v_1 + \dots + \alpha_{k-1} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) v_{k-1} = 0$$

OTTENGO $k-1$ VETTORI NELLA COMBINAZIONE LINEARE: PER IPOTESI INDUTTIVA: I $k-1$ VETTORI SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI $\Rightarrow$

QUINDI $\alpha_j (\lambda_k - \lambda_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k-1$ POICHÉ $\lambda_k \neq \lambda_j$ $\forall k \neq j$, $\lambda_k - \lambda_j \neq 0 \Rightarrow \alpha_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k-1 \Rightarrow$

NELLA COMBINAZIONE INIZIALE (■) OTTENIAMO SOSTITUENDO $\alpha_j = 0 \ \forall j = 1, \dots, k-1$

$0 v_1 + \dots + 0 v_{k-1} + \alpha_k v_k = 0 \Rightarrow \alpha_k v_k = 0$ MA

$v_k \neq 0$ PER IPOTESI (È AUTOVETTORE) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_k = 0 \Rightarrow$ $v_1, \dots, v_k$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

c.v.d.

CERCO GLI AUTOVETTORI DI UN OPERATORE $T: V \to V \mid \dim V = n$

CIOÈ CERCO I VETTORI $v \in V$ PER I QUALI $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$T(v) = \lambda v \ \wedge \ v \neq 0$

$\Rightarrow T(v) - \lambda v = 0 \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{POSTO } v = id(v)} , \ T(v) - \lambda \, id(v) = (T - \lambda id)(v) = 0$

$\Rightarrow$ CERCO I VETTORI ~~NONNULL~~ NON NULLI CHE APPARTENGANO AL NUCLEO DI $(T - \lambda id)$: RICHIEDO CHE $(T - \lambda id)$ NON SIA NÉ SURIETTIVA NÉ INIETTIVA POICHÉ IN QUEL CASO $\ker(T - \lambda id) = \{0\}$

$\Rightarrow$ CERCO $(T - \lambda id)$ IN MODO CHE NON SIA NÉ SURIETTIVA NÉ INIETTIVA $\Rightarrow$ IN UNA BASE QUALUNQUE $\mathcal{B}$ di V

$[T-\lambda id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ DEVE AVERE DETERMINANTE NULLO

$$[T-\lambda id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda [id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I \Rightarrow$$

voglio $\left| [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I \right| = 0$

QUINDI:

LE RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO DI $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ SONO GLI AUTOVALORI DI T!

SE λ_0 È UNO DI TALI AUTOVALORI $\Rightarrow$ L'AUTOSPAZIO CORRISPONDENTE A λ_0 È LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DEL SISTEMA $\left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda_0 I\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$

LA DIMENSIONE DI E_{λ_0} È DETTA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA DELL'AUTOVALORE λ_0

MENTRE LA MOLTEPLICITÀ DI λ_0 COME RADICE DEL POLINOMIO CARATTERISTICO È DETTA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DI λ_0

ESERCIZIO: $\dim E_\lambda \geq 1$

ESERCIZIO: $\dim E_\lambda \leq$ molteplicità algebrica di λ

(FARE PER ESERCIZIO)