Dato A INSIEME $\Rightarrow$ definisco l'operazione "$*$" su A in modo che $(A,*)$ sia un gruppo. SIA $V \subset A$, SUO SOTTOINSIEME $\Rightarrow$ DIAMO LA <u>DEFINIZIONE</u>:
Se V è chiuso rispetto a "$*$", cioè $\forall\, v_1\, v_2 \in V$, $v_1 * v_2 \in V \Rightarrow V$ <u>sottogruppo</u> di A.

Non tutti i sottoinsiemi di A sono sottogruppi.

es. $(\mathbb{Z},+) \Rightarrow$ prendo $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{N}$ è sottogruppo di $(\mathbb{Z},+)$? Si.
La somma di $a, b \in \mathbb{N}$ da $c \in \mathbb{N}$.

es. $\{0, 1, -28, 3\}$ non è sottogruppo di $\mathbb{Z}$ $(1-28=-27)$ $-27 \notin V$.

<u>DEFINIZIONE</u>

Se $(V, +, \cdot\lambda)$ è spazio vettoriale sul campo $k \Rightarrow$ Un sottoinsieme $W \subset V$ è sottospazio vettoriale di V se:

- W è chiuso rispetto alle operazioni in V.
- L'elemento neutro della somma deve stare in W.

es.

- $(\mathbb{R}, +, \cdot) \Rightarrow \mathbb{N}$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}$? no, perché preso $v=2 \in \mathbb{N}$ e $\lambda = \sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$
- $W=\{0\}$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}$

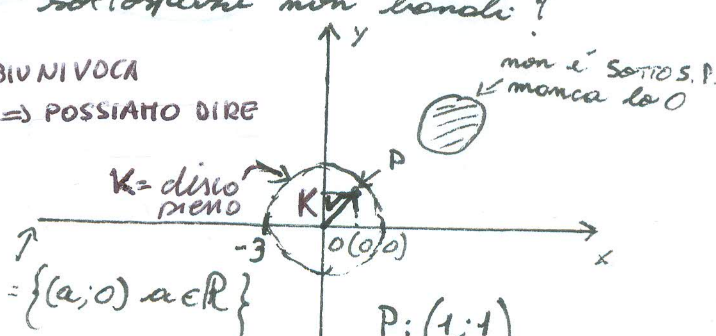
qualunque sia lo spazio vettoriale di partenza $W=\{0\}$ è un sottospazio vettoriale, per questo è detto "banale".
Il secondo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}$ è $\mathbb{R}$ stesso e anch'esso è detto banale. POICHE' LO SPAZIO VETT. E' SEMPRE SOTTOSPAZIO VETT. DI SE STESSO
La ricerca dei sottospazi si concentra su quelli non banali.

- dato $(\mathbb{R}^2, +, \cdot\lambda)$, quali sono i suoi sottospazi non banali?

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ E' IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA
$a \to (a;0)$ CON UN SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ POSSIAMO DIRE
CHE $\mathbb{R}$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$:

$(a_1, 0) + (a_{11} + 0) = (a_1 + a_{11}, 0)$

$\lambda(a;0) = (\lambda a, 0)$



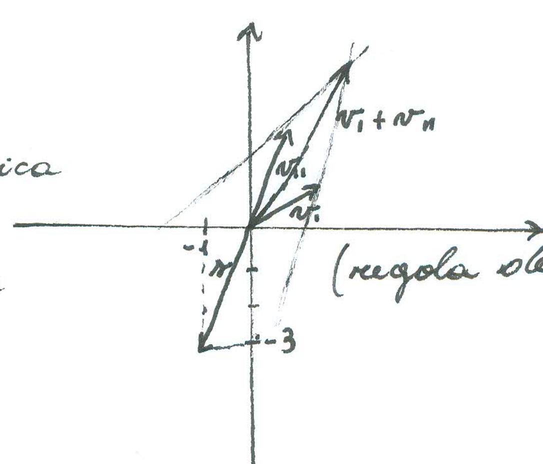
SIA $v=(1;1) \Rightarrow 10v$ non rientra nel disco K perciò K non è sottospazio vettoriale.

$P:(1;1)$
il vettore geometrico che rappresenta P è il segmento che congiunge origine e P, orientato verso P. Questa rappresentazione vale in qualsiasi dimensione $\mathbb{R}^n$.

- dato $P(-1;-3)$, il vettore che lo descrive è v

In $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ è possibile la rappresentazione geometrica

- Altri sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$ sono tutte le rette passanti per l'origine.



(regola del parallelogramma)

21/10/2015

Quali sono i sottospazi vettoriali di R^3?

- $V: \{0;0;0\}$ e R^3: banali.
- Tutte le rette passanti per l'origine e tutti i piani passanti per l'origine.

Per definire rette e piani è necessario risolvere sistemi lineari:
Per cui si può dire che tutti i sottospazi vettoriali di uno spazio ambiente con n dimensioni ~~sono soluzioni~~ di sistemi lineari omogenei. con soluzioni.

Proposizione: Lo spazio delle soluzione di un sistema omogeneo di p equazioni in n incognite è un sottospazio vettoriale di R^n.

dimostrazione: $\exists$ sempre la soluzione nulla quindi $0 \in Sol\,\Sigma_0$.

1) siano $v_1 \in v_{11} \in Sol\,\Sigma_0 \Rightarrow v_1 + v_n \in Sol\,\Sigma_0$ (da dimostrare)

2) e se $\lambda \in R$ e $v \in Sol\,\Sigma_0 \Rightarrow \lambda v \in Sol\,\Sigma_0$ (da dimostrare)

1) Siano $V_1 = (a_1, a_{11} \dots a_m)$, $V_n = (b_1, b_{11} \dots b_m)$, $V_1 + V_n = (a_1 + b_1, a_{11} + b_{11} \dots a_m + b_m)$

considero un'equazione di Σ_0: $l_1 x_1 + l_{11} x_{11} + \dots + l_m x_m = 0$

sostituisco $V_1 + V_{11}$ nell'equazione: $l_1(a_1 + b_1) + l_n(a_n + b_n) \dots l_m(a_m + b_m) = 0$

svolgendo: $\underbrace{l_1 a_1 + l_{11} a_2 + \dots + l_m a_m}_{0} + \underbrace{l_1 b_1 + l_n b_n \dots + l_m b_m}_{0} = 0$ identità.

2) sia $v = (a_1, \dots, a_m) \in Sol\,\Sigma_0 \Rightarrow \lambda v = (\lambda a_1, \lambda a_n \dots \lambda a_m)$

considero un'equazione qualsiasi di Σ_0: $l_1 x_1 + l_{11} x_n \dots l_m x_m = 0$

sostituendo: $l_1(\lambda a_1) + l_{11}(\lambda a_{11}) + \dots + l_m(\lambda_m a_m) = 0$

$$\lambda \underbrace{(l_1 a_1 + l_{11} a_n \dots l_m a_m)}_{0} = 0 \rightarrow \text{identità}$$