Definizione: Sia $\varphi: V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare su $V \Rightarrow \varphi$ è detta degenere se una qualunque delle sue matrici ha rango $<$ dim(V).

Proposizione: Sia $\varphi: V\times V \to \mathbb{R}$ degenere $\Rightarrow \varphi$ ha vettori isotropi non nulli.

Dimostrazione: Data B^* base di V sp. vett. n-dimensionale $\Rightarrow [\varphi]_B$ non ha rango massimo $\Rightarrow$ una colonna di $[\varphi]_B$ dipende lin. dalle altre, cioè la colonna $C^J = \alpha_1 C^1 + \alpha_2 C^2 + \dots + \alpha_n C^n$, con $\alpha_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}$. Nel nostro caso la colonna

$* B = \{v_1, \dots, v_n\}$.

$$C^J = (\varphi(v_1, v_J) \quad \varphi(v_2, v_J) \dots \varphi(v_n, v_J))^T = \alpha_1 \begin{pmatrix} \varphi(v_1, v_1) \\ \vdots \\ \varphi(v_n, v_1)\end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} \varphi(v_1, v_n) \\ \vdots \\ \varphi(v_n, v_n)\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \varphi(v_1, v_J) = \alpha_1 \varphi(v_1, v_1) + \dots + \alpha_n \varphi(v_1, v_n) \\ \vdots \\ \varphi(v_n, v_J) = \alpha_1 \varphi(v_n, v_1) + \dots + \alpha_n \varphi(v_n, v_n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\varphi(v_1, v_J) + \alpha_1 \varphi(v_1, v_1) + \dots + \alpha_n \varphi(v_1, v_n) = 0 \\ \\ -\varphi(v_n, v_J) + \alpha_1 \varphi(v_n, v_1) + \dots + \alpha_n \varphi(v_n, v_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

SFRUTTANDO LA BILINEARITÀ:

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(v_1, \underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n - v_J}_{w}) = 0 \\ \varphi(v_n, \underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n - v_J}_{w}) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ho trovato un vettore w che è φ-coniugato a tutti i vettori di $B \Rightarrow w$ è φ-coniugato a tutti i vettori dello spazio $\Rightarrow w$ è coniugato con se stesso. Quindi w è isotropo. $\boxed{\text{QED}}$

Osservazione: Se $\varphi: V\times V \to \mathbb{R}$ è non degenere allora può avere vettori isotropi.

Esempio: $\varphi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto x_1 y_2 + y_1 x_2$$
(SIMMETRICA)

$\Rightarrow$ Considero la base canonica di $\mathbb{R}^2$ e scrivo la matrice: $[\varphi]_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i vettori della base sono isotropi, infatti $\varphi\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = 0$ e $\varphi\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = 0$.

Dato che sulla diagonale ci sono le immagini di $\varphi(v_J, v_J)$, se le entrate della diagonale sono nulle allora i corrispondenti vettori di base sono isotropi.

Proposizione: Sia $\varphi: V\times V \to \mathbb{R}$ forma bil. simmetrica non nulla $\Rightarrow \exists$ in V almeno un vettore non isotropo.

Dimostrazione: Poiché φ è non nulla $\Rightarrow \exists\, v, w \in V \mid \varphi(v,w) \neq 0$. Considero il vettore somma $u = v + w$ e considero $\varphi(u,u)$, sfruttando la bilinearità:

$$\varphi(v, v+w) + \varphi(w, v+w) = $$
$$= \varphi(v,v) + \varphi(v,w) + \varphi(w,v) + \varphi(w,w) \overset{\text{SIMM.}}{=} \varphi(v,v) + 2\varphi(v,w) + \varphi(w,w) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(v,w) = \frac{\varphi(v+w, v+w) - \varphi(v,v) - \varphi(w,w)}{2} \neq 0 \Rightarrow$$
(POSSIAMO DIVIDERE PER 2 PERCHÉ char $\mathbb{R} \neq 2$).

$\Rightarrow$ almeno uno dei vettori $v, w, v+w$ è non isotropo perché almeno uno dei termini al numeratore è $\neq 0$. $\boxed{\text{QED}}$

PROPOSIZIONE: Sia $\varphi: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bil. simmetrica non nulla $\Rightarrow$ esiste una base B_V φ-ortogonale, cioè formata da vettori φ-ortogonali.

DIMOSTRAZIONE (per induzione sulla dim V):

1) Verifica per $N=1 \Rightarrow V=\mathbb{R} \Rightarrow \varphi: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: PROPOSIZIONE VERA!

2) Supponiamo la proposizione vera fino a $\dim V = K$ e dimostriamola per $\dim V = K+1$.

Sia $\dim V = K+1$, prendo $v \in V$ un vettore non φ-isotropo e considero il sottospazio vettoriale $\langle\langle v \rangle\rangle$, 1-dimensionale generato da $v \Rightarrow \langle\langle v\rangle\rangle^{\perp} \rightarrow \dim\langle\langle v\rangle\rangle^{\perp} = (K+1) - \dim\langle\langle v\rangle\rangle = K+1-1 = K \rightarrow \dim\langle\langle v\rangle\rangle^{\perp} = K \Rightarrow$
$\Rightarrow$ per ipotesi induttiva so che per φ ristretta a $\langle\langle v\rangle\rangle^{\perp}$: $\varphi: (\langle\langle v\rangle\rangle)^{\perp} \times (\langle\langle v\rangle\rangle)^{\perp} \longrightarrow \mathbb{R}$ (forma bil. simmetrica) la proposizione è verificata. Quindi si può trovare una base B di $\langle\langle v\rangle\rangle^{\perp}$ φ-ortogonale (con φ ristretta a $\langle\langle v\rangle\rangle^{\perp}|_\varphi$, che però coincide con la φ di partenza). Ad esempio:

$$B_{\langle\langle v\rangle\rangle^{\perp}} = \{u_1, \dots, u_K\}$$

Per concludere, aggiungendo v ai vettori di $B_{\langle\langle v\rangle\rangle^{\perp}}$, poiché v è φ-ortogonale ai vettori di $B_{\langle\langle v\rangle\rangle^{\perp}}$, v è linearmente indipendente rispetto ai vettori di $B_{\langle\langle v\rangle\rangle^{\perp}}$. Quindi, avendo un insieme di $K+1$ vettori l. i. si ha una base di V, spazio vett. $(K+1)$-dimensionale. $\boxed{\text{QED}}$

N.B. È fondamentale che φ sia SIMMETRICA perché nella dimostrazione si sono usate proprietà delle matrici simmetriche.

COROLLARIO: Una matrice simmetrica definita su un campo $\mathbb{K}$ di Char $\mathbb{K} \neq 2$, è SEMPRE congruente ad una matrice diagonale.

N.B. Fin'ora ~~[illegible]~~ $\boxed{\text{similitudine} \neq \text{congruenza}}$

DEFINIZIONI SULLE FORME BILINEARI SIMMETRICHE

1) Sia $\varphi: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$, φ è detta:

- DEFINITA POSITIVA: Se $\varphi((v,v)) > 0$, $\forall v \in V$, con $v \neq 0_V$;
- DEFINITA NEGATIVA: Se $\varphi((v,v)) < 0$, $\forall v \in V$, con $v \neq 0_V$;
- POSITIVA: Se $\varphi((v,v)) \geq 0$, $\forall v \in V$;
- NEGATIVA: Se $\varphi((v,v)) \leq 0$, $\forall v \in V$;
- INDEFINITA: negli altri casi.

FORME QUADRATICHE

DEFINIZIONE: Dato V sp. vettoriale n-dimensionale, $Q: V \longrightarrow \mathbb{R}$ è detta forma quadratica se:

1) $Q(\alpha v) = \alpha^2 Q(v)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$.

2) la forma $\varphi: V\times V \rightarrow \mathbb{R}$ così definita: $\varphi((v,w)) = Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$ è bilineare simmetrica.

Ad esempio: $Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, Q è forma quadratica? 1) Cerco $Q(\alpha x) = (\alpha x)^2 = \alpha^2 x^2 = \alpha^2 Q(x)$ OK

2) Diamo $\varphi: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \,/\, \varphi((x,y)) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x+y)^2 - x^2 - y^2 = \boxed{2xy = \varphi((x,y))}$

- φ è bilineare? $\varphi((\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y)) = \alpha_1\varphi((x_1,y)) + \alpha_2\varphi((x_2,y))$? Sì, infatti $2[(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)y] = 2\alpha_1 x_1 y + 2\alpha_2 x_2 y$

Stessa cosa si dimostra per la seconda componente (y). Quindi φ è forma bilineare ed è immediato dimostrare che è simmetrica $\Rightarrow Q$ è una forma quadratica QED.

Forme quadratiche e bilineari simmetriche (entrambe reali) sono strettamente collegate, infatti:
Data $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$ forma quad, cerco una forma bilineare simmetrica φ_Q t.e. $\varphi_Q((v,v)) = Q(v)$, $\forall v \in V$.
Abbiamo già $\varphi \,/\, \varphi((v,w)) = Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$, forma bilineare simmetrica. Se $v=w \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi((v,v)) = Q(2v) - Q(v) - Q(v) = 2Q(v) \rightarrow$ se prendo $\varphi_Q = \frac{\varphi}{2} \Rightarrow$ Se prendo ~~$\varphi_Q = \frac{1}{2}\varphi$~~ $\varphi_Q((v,v)) = \frac{1}{2}\varphi((v,v)) = Q(v)$.

Tale forma bilineare è detta FORMA POLARE della forma quadratica Q.

$$\text{FORMA POLARE DI } Q:\ \varphi_Q((v,w)) = \frac{Q(v+w) - Q(v) - Q(w)}{2}$$

Si dimostra che tale forma polare è unica, a partire da Q. (da dimostrare, INPUT: PER ASSURDO).
Viceversa, partendo da una forma bilineare simmetrica, si può associare a quest'ultima una forma quadratica? SÌ: È SUFFICIENTE CHE

Diamo la forma $Q: V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto Q(v) = \varphi((v,v))$; Q è forma quadratica? Verifichiamo la def. di Q:

1) $Q(\alpha v) = \varphi((\alpha v, \alpha v)) = \alpha^2 \varphi((v,v)) = \alpha^2 Q(v)$; OK.

2) Consideriamo $\varphi'((v,w)) = Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$, con $\varphi': V \times V \to \mathbb{R}$; φ' è bilineare? (DA FARE).

In conclusione, posso determinare un ISOMORFISMO fra gli insiemi $\mathrm{Bil}_{SIMM}[V] \xrightarrow{\phi} \mathrm{Quad}(V)$.

$\varphi \longmapsto \phi(V) = Q / Q(v) = \varphi((v,v))$.

$\varphi_Q \longleftarrow Q$

Le due applicazioni sono l'una l'inversa dell'altra $\Rightarrow \varphi \equiv \varphi_Q$.

Possiamo associare una matrice alla forma quadratica; com'è fatta?

Data la forma polare di Q, φ_Q, e fissata una base B_V di V, allora possiamo definire la matrice $[\varphi]_{B_V}$. Tale matrice dà $\varphi((v,w)) = [v]^T_{B_V} [\varphi]_{B_V} [w]_{B_V}$; allo stesso modo, poiché $Q(v) = \varphi((v,v))$ avremo che $Q(v) = [v]^T_{B_V} [\varphi]_{B_V} [v]_{B_V}$. ($[\varphi]_{B_V}$ = MATRICE ASSOCIATA A Q in B_V.)

Ad esempio: Data $Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2)^T \mapsto x_1 x_2$ $\Rightarrow$ determinare la matrice associata a Q nella base canonica di $\mathbb{R}^2$.