20/05/2016

PROPRIETÀ METRICHE NEL PIANO

- Valutiamo perpendicolarità e distanza

norma del vettore differenza

$P = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ DISTANZA $d(P,Q) = \overline{PQ} = \| V_Q - V_P \| =$

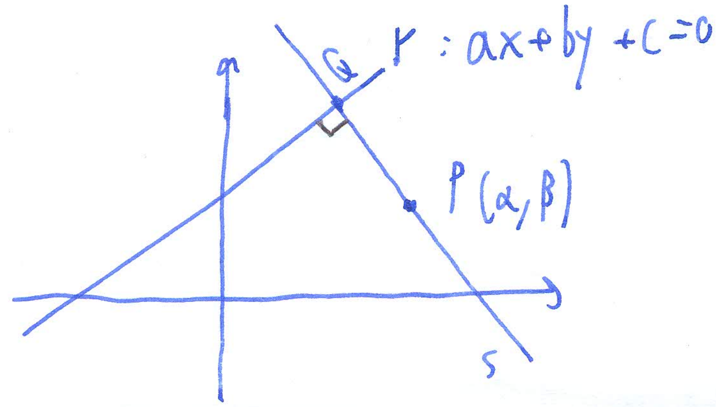
$= \sqrt{(V_Q - V_P) \cdot (V_Q - V_P)}$

$\Rightarrow$ prodotto scalare standard $\Rightarrow$ $\overline{PQ} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

- DISTANZA PUNTO-RETTA

$\downarrow$

distanza minima di P da tutti i punti della retta



$Q = s \cap r$ con $s \perp r$

SI DIMOSTRA CHE LA DISTANZA DI P DA r È LA LUNGHEZZA DEL SEGMENTO PQ : TROVARE TALE DISTANZA PER ESERCIZIO

- PERPENDICOLARITÀ TRA DUE RETTE

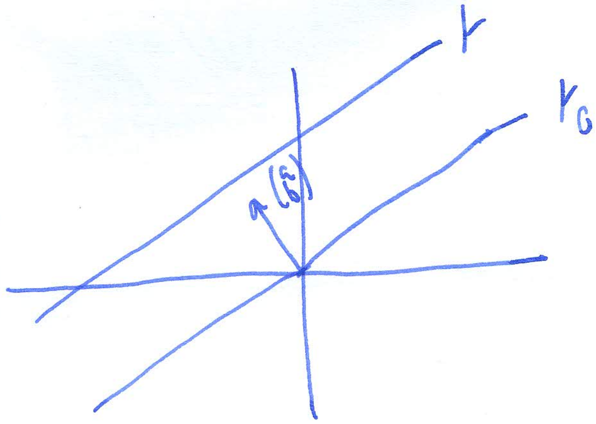
$r: ax+by+c=0$ e $s: \alpha x+\beta y+\gamma=0$

Se $r \perp s \Rightarrow$ presa $r' // r$ e $s' // s \Rightarrow r' \perp s'$

$\Rightarrow$ le DIREZIONI delle due rette sono perpendicolari $\Rightarrow$ USIAMO LE DIREZIONI

$r_0: \underbrace{ax+by}=0$ $\quad s_0: \alpha x+by=0$ $\leftarrow$ DIREZIONI DELLE RETTE

prodotto scalare tra $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ i vettori della retta sono perpendicolari al vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \perp r_0$

$\Rightarrow$ vale la stessa cosa per s

$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} \perp s_0$

$\Rightarrow s_0 \perp r_0$ se $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ sono perpendicolari $\Rightarrow \boxed{a\alpha + b\beta = 0}$

Es.

Data la retta $r: x+2y+3=0$ dare s: $s \perp r$ passante per $P=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$$s: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \underbrace{t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}} + \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \rightarrow s: t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \leftarrow P$$

impongo la perpendicolarità a r, dato che il vettore $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ GENERA la direzione $\perp$ a r

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t \end{cases} \quad \begin{cases} t = x-1 \\ y = 2x-2 \end{cases}$$

$\Rightarrow s: y-2x+2=0$

- COEFFICIENTE ANGOLARE $\quad ax+by+c=0 \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

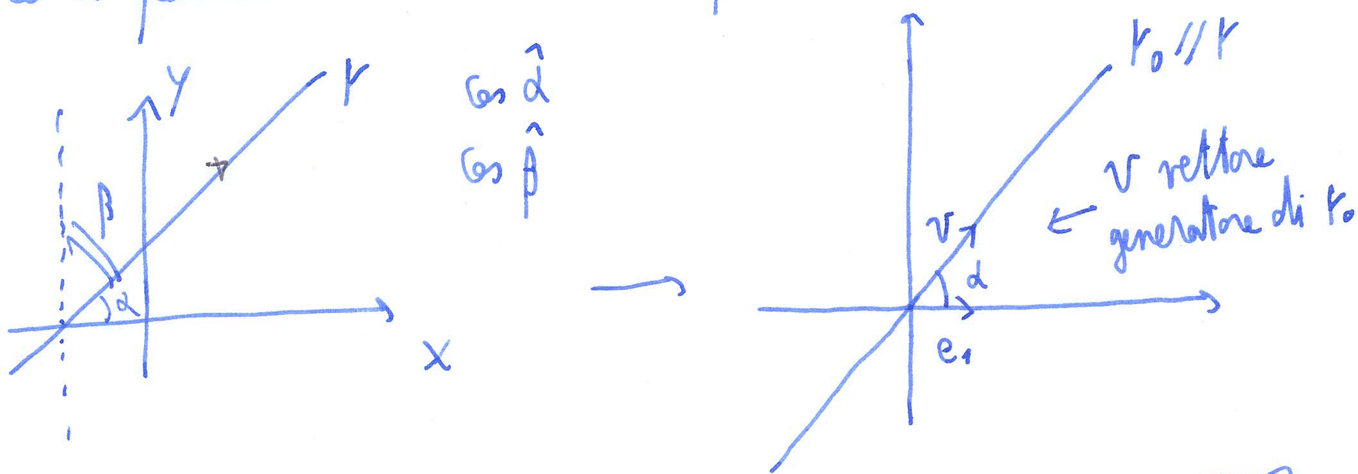
coeff. angolare

$r: x+2y+3=0 \rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ $\qquad m_r = -\frac{1}{m_s}$

$s: y-2x+2=0 \rightarrow y = 2x-2$

- COSENI DIRETTORI

Coseno direttore di una retta in $\mathbb{R}^2$ è il coseno dell'angolo che la retta forma con le direzioni positive degli assi coordinati



Calcoliamo il coseno di $\hat{\alpha}$

$$\cos\hat{\alpha} = \frac{e_1 \cdot v}{\underbrace{\|e_1\|}_{=1}\,\underbrace{\|v\|}_{=\sqrt{l\cdot l + m\cdot m}}} \quad \text{con } v = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \text{ e } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{\pm l}{\sqrt{l^2+m^2}}}$$

$$\boxed{\cos\beta = \frac{\pm m}{\sqrt{l^2+m^2}}}$$

- ANGOLO TRA DUE RETTE r ed s

· calcoliamo il coseno $\quad r: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$; $s: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underbrace{\cos\alpha}_{\text{angolo } \hat{rs}} = \pm \frac{l\,l_1 + m\,m_1}{\sqrt{l^2+m^2}\,\sqrt{l_1^2+m_1^2}}$$

$l\,l_1 + m\,m_1 \rightarrow$ prod. vett. dei due generatori

$\sqrt{l^2+m^2}\,\sqrt{l_1^2+m_1^2}$: norme dei generatori

- PROPRIETÀ METRICHE NELLO SPAZIO (3-D)

- RETTE PERPENDICOLARI

Se vediamo la ~~complanarità~~ perpendicolarità come proprietà delle direzioni possiamo estendere la perpendicolarità alle rette sghembe

$$r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \qquad s: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

~~basta~~ considerare le direzioni r_0 ed s_0 $\Rightarrow r_0 \perp s_0 \Leftrightarrow ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0$

Es. $r \begin{cases} x+y-1=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$ $\quad s \begin{cases} 2x-y-z+1=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ $\quad r \perp s$?

$\Rightarrow$ passiamo alla forma parametrica

$$r \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow l=2 \quad m=-2 \quad n=-1 \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2+2-3 \neq 0$$

$$s \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow l_1 = 1 \quad m_1 = -1 \quad n_1 = 3$$

$\Rightarrow$ NON SONO $\perp$

- PERPENDICOLARITÀ RETTA-PIANO

$$r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \underbrace{\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}}_{\text{genera } r_0} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \qquad \pi: ax+by+cz+d=0$$

$\downarrow$

π_0: $ax+by+cz=0 \Rightarrow$ punti $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tali che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \pi_0$

I PUNTI DEL PIANO SONO $\perp$

$\Rightarrow r_0 \perp \pi_0 \iff \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \in \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$, cioè il generatore della retta è sulla stessa retta del vettore $\perp$ a π_0.

$$\Rightarrow \frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$$

Es. dare la retta $\perp$ a $x+y+z+2=0$ passante per $P\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{r_0} \; \underset{+}{+} \; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{P} \Rightarrow \begin{cases} x = t+1 \\ y = t+1 \\ z = t+1 \end{cases}$$

- <u>PERPENDICOLARITÀ PIANO - PIANO</u>

$\pi: ax+by+cz+d=0 \qquad \pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

$$\pi \perp \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \pi_1 \perp \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \pi \perp \pi_1 \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \Rightarrow aa_1+bb_1+cc_1=0$$

- <u>Equazione retta $\perp \pi: ax+by+cz+d=0$ e passante per $P_0(x_0,y_0,z_0)$</u>

$$\Rightarrow \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

- Equazione piano per $P(x_0,y_0,z_0)$ e $\perp$ retta con (l,m,n) par. direttori

$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0$$

- COSENI DIRETTORI DI UNA RETTA r

- angoli della direzione r_0 con gli assi coordinati (FISSATO L'ORIENTAMENTO DEGLI ASSI E DI r_0)

$$\Rightarrow \cos \widehat{rx} = \pm \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \; , \quad \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \text{ par. direttori di } r \; ;$$

$$\cos \widehat{ry} = \pm \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \; ; \quad \cos \widehat{rz} = \pm \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

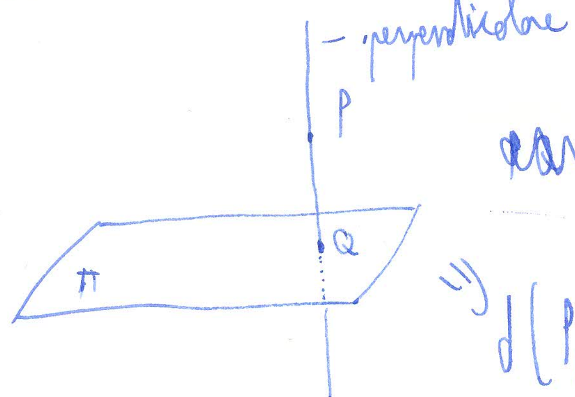
- COSENO ANGOLO TRA r ed s

$$r \to \begin{pmatrix} l_r \\ m_r \\ n_r \end{pmatrix} \quad s \to \begin{pmatrix} l_s \\ m_s \\ n_s \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{rs} = \pm \frac{l_r l_s + m_r m_s + n_r n_s}{\sqrt{l_r^2+m_r^2+n_r^2}\,\sqrt{l_s^2+m_s^2+n_s^2}}$$

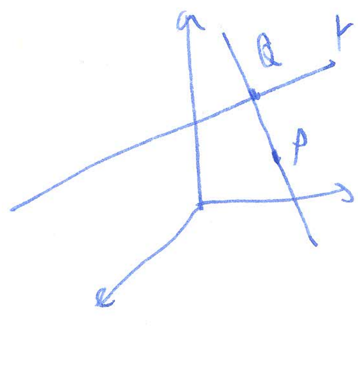
- DISTANZA

- PUNTO - PIANO



$$\Rightarrow d(P,\pi) = \overline{PQ} = \|V_Q - V_P\|$$

- PUNTO - RETTA



$$d(P,r) = \|V_Q - V_P\|$$

- RETTA - RETTA

se sono complanari e parallele → distanza = lunghezza segmento tra le intersezioni con una retta ⊥

se sono incidenti → distanza = 0

se sono sghembe → ? (FARE PER ESERCIZIO)

- PIANO - PIANO

  - incidenti → distanza = 0
  - paralleli → trovo la perpendicolare comune, LA INTERSECO CON I PIANI E TROVO LA DISTANZA TRA I PUNTI DI INTERSEZIONE CON I PIANI.