19 Ottobre 2015 CALCOLARE MATRICE INVERSA

I metodo (Cramer)

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, invertibile $\Rightarrow \exists A^{-1}$ e si trova così:

formiamo la matrice A^* (AGGIUNTA di A) dei complementi algebrici delle entrate di A cioè:

$$A^* = \left((-1)^{i+j} \, |A_{\hat{i}\hat{j}}| \right) \Rightarrow A^{-1} = \frac{(A^*)^T}{|A|}$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ A è invertibile?

Calcolo $|A| = 4 - 6 = -2$

$$\Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 4 & (-1)^{1+2} \cdot 3 \\ (-1)^{2+1} \cdot 2 & (-1)^{2+2} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II metodo (con Metodo di eliminazione di Gauss)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3R_1 - R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \overset{R_1 - R_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \overset{R_2/2 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} & -1/2 \end{array}\right) = \left(I \;\middle|\; A^{-1} \right)$$

Dato un insieme V definisco due operazioni su V: la "somma"; dati $v_1, v_2 \in V \Rightarrow$ definisco $v_1 + v_2$ $\forall v_1, v_2 \in V$; e la "moltiplicazione per uno scalare" $\lambda \in K$ campo: dato $v \in V$ definisco $\lambda v \in V$.

CON L'OPERAZIONE DI SOMMA INTRODOTTA:
$(V, +)$ deve essere un gruppo commutativo

Inoltre le due operazioni devono verificare le seguenti proprietà:

1) $\forall \lambda, \mu \in K$ e $v \in V \Rightarrow (\lambda \mu) v = \lambda(\mu v)$

2) $\lambda (v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$ $\forall \lambda \in K$ e $v_1, v_2 \in V$

3) $\exists$ l'elemento "1" tale che $1 \cdot v = v \cdot 1 = v$

$\Rightarrow (V, +, \cdot\lambda)$ è detto SPAZIO VETTORIALE. SUL CAMPO K

Esempi numerici

Ne 1) $V = \mathbb{R}$ Considero la somma tra numeri reali e la moltiplicazione tra numeri reali.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è spazio vettoriale su se stesso.

2) $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

Definisco la "somma": $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$

$\Rightarrow v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

è associativa? $(v_1+v_2)+v_3 \overset{?}{=} v_1+(v_2+v_3)$

$$\big((x_1+x_2,\ y_1+y_2)+(x_3,\ y_3)\big) = (x_1,\ y_1)+(x_2+x_3,\ y_2+y_3)$$

$$\big((x_1+x_2)+x_3,\ (y_1+y_2)+y_3\big) = \big(x_1+(x_2+x_3),\ y_1+(y_2+y_3)\big)$$

✓

∃ elemento neutro? Sì, $0=(0,0)$

Dato $v=(x,y)$ ∃ l'opposto? Cerco $w=(r,s)$ tale che $v+w=w+v=0$

$$v+w=(x+r,\ y+s)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} x+r=0 & r=-x \\ y+s=0 & s=-y \end{cases}$$

$\Rightarrow w=(-x,-y)$

E' commutativa? $v_1+v_2 = v_2+v_1$ ✓

$$\begin{array}{ccc} v_1+v_2 & = & v_2+v_1 \\ \| & & \| \\ (x_1+x_2,\ y_1+y_2) & = & (x_2+y_1,\ y_2+y_1) \end{array}$$

$\mathbb{R}^2$ è un gruppo commutativo.

Definisco $\lambda \cdot v$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v=(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \lambda \cdot v = (\lambda x,\ \lambda y)$

$((\lambda\mu)x, (\lambda\mu)y) \quad (\lambda(\mu x), \lambda(\mu y))$

$(\lambda\mu)v \quad = \quad \lambda(\mu v)$ ✓

Associatività del prodotto fra numeri reali.

$\lambda(v_1+v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$

$\big(\lambda(x_1+x_2),\ \lambda(y_1+y_2)\big) = (\lambda x_1+\lambda x_2,\ \lambda y_2+\lambda y_2)$

Propietà distributiva $\overbrace{\text{dei numeri reali}}^{\text{DELLA MOLTIPLICAZIONE RISPETTO ALLA SOMMA}}$. ✓

L'elemento neutro è $1\in\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2$ è uno <u>spazio vettoriale.</u>

Tutto ciò può essere esteso a qualunque spazio $\mathbb{R}^n$, e le operazioni rimangono sempre quelle.

$\left(M_{p\times n}(\mathbb{R}) ; + , \cdot\lambda\right)$ è SPAZIO VETTORIALE, dove i singoli elementi sono le singole matrici.

$\mathcal{C}^0_{[a,b]} = \{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \ f \text{ continua}$

Definisco in $\mathcal{C}^0_{[a,b]}$ la "somma": date $f, g \in \mathcal{C}^0_{[a,b]}$

$\Rightarrow f + g \in \mathcal{C}^0_{[a,b]}$ è tale che $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Le immagini sono tutte numeri reali.

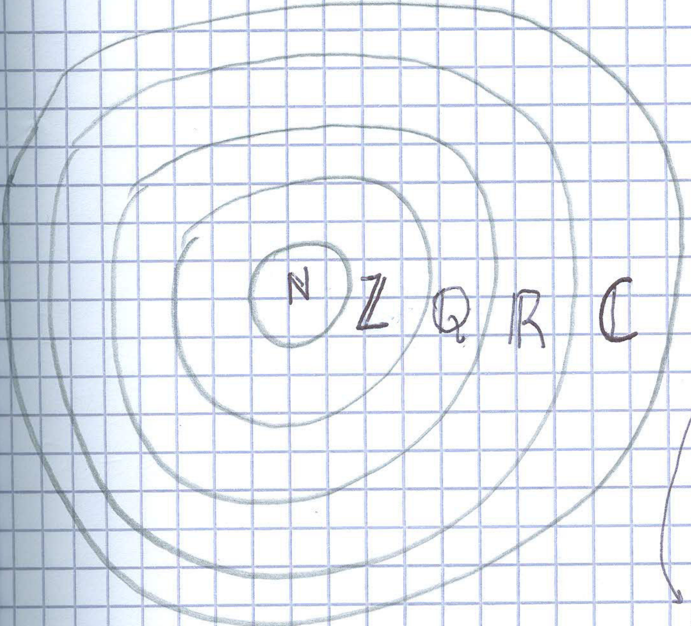
Dato che sono rispettate le proprietà prima elencate l'insieme $\mathcal{C}^0_{[a,b]}$ è gruppo commutativo.

Definisco in $\mathcal{C}^0_{[a,b]}$ la moltiplicazione per uno scalare λ. Data $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$\lambda f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (\lambda f)(x) = \lambda \cdot (f(x))$

Verificare le proprietà dell'operazione $\lambda \cdot f$ che rendono $\left(\mathcal{C}^0_{[a,b]} ; + , \cdot\lambda\right)$ uno spazio vettoriale.

Un sottoinsieme che diventa un sottogruppo (ADDITIVO) di $\mathbb{R}$ é $\mathbb{Z}$.



$$\frac{2}{3} \sim \frac{4}{6}$$

$$(2,3) \sim (4,6) \iff 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$$

$$(p;q) \sim (n,r) \iff p \cdot r = q \cdot n$$

CLASSE di EQUIVALENZA

Applicazioni tra $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ è MORFISMO se interagisce con le operazioni. SE SI CONSIDERA IL SEGUENTE MORFISMO

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ n &\longmapsto \frac{n}{1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{Z}$ diventa isomorfo ad un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$.

IN $\mathbb{Q}$ È DEFINITA LA SEGUENTE ADDIZIONE:

$$\frac{n}{1} + \frac{m}{1} = \frac{n \cdot 1 + m \cdot 1}{1} = n + m$$