18/05/16

Classificazione affine (o metrica) delle quadriche di $\mathbb{R}^n$ euclideo.

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k x_k + c = 0$$

$\Rightarrow$ posto $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vettore delle coordinate di $\mathbb{R}^n$ in una base fissata,

$A = (a_{ij})$ e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ avremo: $$X^T A X + B^T X + C = 0$$

Introduciamo una ulteriore variabile, x_0, e moltiplichiamo i monomi del polinomio per tale variabile elevato ad un grado opportuno a rendere il polinomio omogeneo di grado due:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k x_0 + c x_0^2 = 0$$

ad essa associamo una matrice $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R})$

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_0 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & & & \frac{b_1}{2} \\ \frac{a_{21}}{2} & a_{22} & & & \vdots \\ & & & & \\ & & & & \\ \frac{b_1}{2} & & \cdots & & c \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow$$

Se $\det \tilde{A} \neq 0$

$\Downarrow$

la quadrica Q è non degenere,

se $\det \tilde{A} = 0 \Rightarrow Q$ è degenere

In questo modo si studiamo le quadriche in uno spazio proiettivo, $\mathbb{P}^n$, in cui è possibile distinguere solo due tipologie di quadriche: degenere e non degeneri.

Nel caso di $\mathbb{P}^2$ lo spazio proiettivo È ISOMORFO AD UNA SUPERFICIE sferica, in cui si può facilmente immaginare come vengono trasformate le CONICHE:

IPERBOLI E PARABOLE si "CHIUDONO" ALL'INFINITO DIVENTANDO COME UNA ELLISSE!

TORNIAMO IN $\mathbb{R}^n$ EUCLIDEO:

Fissate le coordinate $X \Rightarrow$ l'equazione è data da

$X^TAX + B^TX + C = 0$ Riduciamo l'equazione alla forma $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2 + \sum_{k=1}^{n} \mu_k y_k + c = 0$

$\forall\ \lambda_j \neq 0$ posso eliminare il termine lineare corrispondente ad y_j con $z_j = y_j + \frac{\mu_j}{2\lambda_j}$

Se scompaiono tutti i termini lineari $\Rightarrow Q$ è una quadrica a centro (cioè $\exists$ un punto C tale che se P è un punto di $Q \Rightarrow$ anche il simmetrico di P rispetto a C appartiene a Q)

1) Se $rg\, A = n \Rightarrow Q$ è non singolare $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_j^2 = c$

1a) $c \neq 0 \Rightarrow$ dividendo per c, possiamo riscrivere l'equazione così: $\frac{z_1^2}{\frac{c}{\lambda_1}} + \frac{z_2^2}{\frac{c}{\lambda_2}} + \dots + \frac{z_n^2}{\frac{c}{\lambda_n}} = 1$ possiamo riscrivere (a meno di cambiare l'ordine dei vettori di base)

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{z_k^2}{a_k^2} - \frac{z_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \dots - \frac{z_n^2}{a_n^2} = 1 \quad \text{ponendo } a_j = \sqrt{\left|\frac{c}{\lambda_j}\right|}$$

Tante segnature diverse posso avere, tante quadriche diverse posso disegnare, tranne $(0,n)$ che non corrisponde a niente di reale.
Sono esattamente n

Caso $n=2$ $(2,0)$ e $(1,1)$

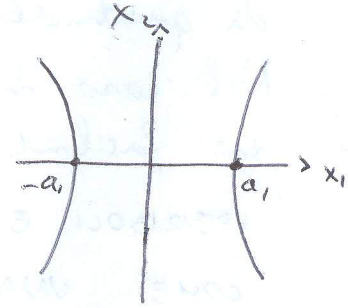
$(2,0) \downarrow$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$$

ellisse

$(1,1) \rightarrow$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$$



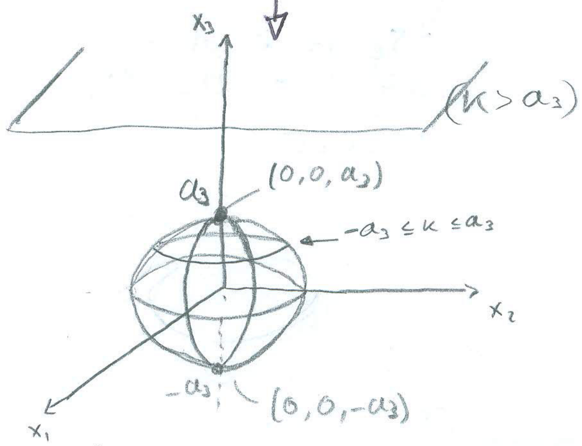
caso $n=3$ $(3,0)$ $(2,1)$ $(1,2)$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=1$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=1$$

$(3,0)$



$$\begin{cases} x_3=0 \\ \dfrac{x_1^2}{a_1^2}+\dfrac{x_2^2}{a_2^2}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=0 \\ \dfrac{x_2^2}{a_2^2}+\dfrac{x_3^2}{a_3^2}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=0 \\ \dfrac{x_1^2}{a_1^2}+\dfrac{x_3^2}{a_3^2}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=k \\ \dfrac{x_1^2}{a_1^2}+\dfrac{x_2^2}{a_2^2}=\dfrac{a_3^2-k^2}{a_3^2} \end{cases} \Rightarrow a_3^2-k^2\geq 0$$

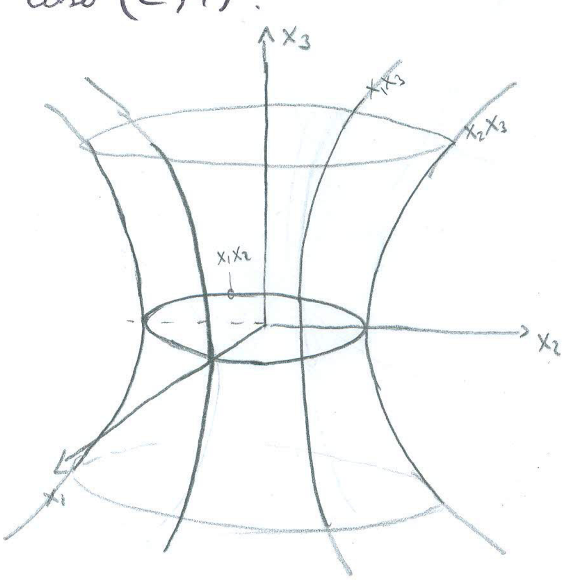
$$\boxed{-a_3\leq k\leq a_3}$$

In questo intervallo il piano interseca la superficie nell'insieme reale.

questa superficie è una **ELLISSOIDE**

---

caso $(2,1)$:

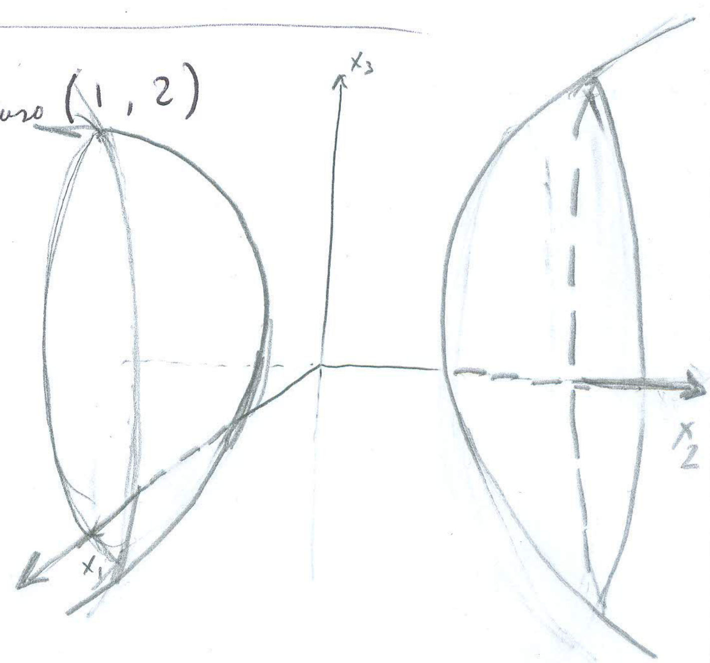


$$\begin{cases} x_3=0 \\ \dfrac{x_1^2}{a_1^2}+\dfrac{x_2^2}{a_2^2}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=0 \\ \dfrac{x_1^2}{a_1^2}-\dfrac{x_3^2}{a_3^2}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=0 \\ \dfrac{x_2^2}{a_2^2}-\dfrac{x_3^2}{a_3^2}=1 \end{cases}$$

IPERBOLE AD UNA FALDA

---

caso $(1,2)$



IPERBOLE A DUE FALDE

1b) $c = 0$ $\quad x_1^2 + \dots + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \dots - \frac{x_n^2}{a_n^2} = 0$

L'EQUAZIONE E' OMOGENEA $\Rightarrow$

Se $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Q \Rightarrow$ anche $(t\alpha_1, \dots, t\alpha_n) \in Q$: ABBIAMO

LE <u>QUADRICHE RIGATE</u> : TALI QUADRICHE CONTENGONO TUTTA LA RETTA GENERATA DAL VETTORE $v \in Q$; QUANTE SONO?

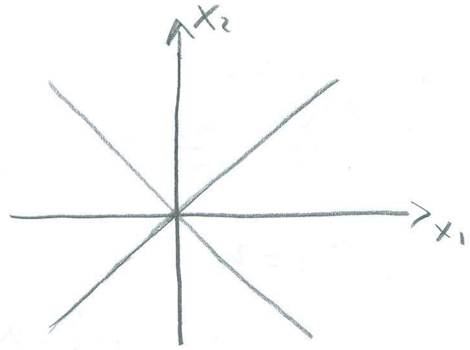
togliendo $(0, n)$ come caso BANALE, COSÌ COME $(n, 0)$, CHE CI DANNO LA SOLA ORIGINE $\Rightarrow$

Se n e' pari abbiamo $\frac{n}{2}$ tipi diversi di quadriche rigate

Se n e' dispari abbiamo $\frac{n-1}{2}$ tipi diversi

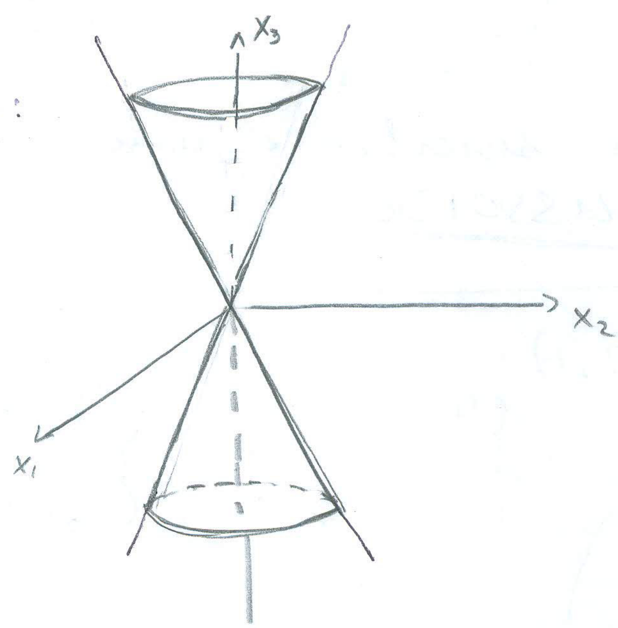
Caso $n = 2$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$$



Caso $n = 3$: UNA SOLA RIGATA :

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0 \\ x_3 = k \end{cases}$$



<u>SUP. CONICA</u>

FOGLIO 3 18/05/16

2) Supponiamo di ottenere l'equazione

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\dots+\frac{x_k^2}{a_k^2}-\frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2}-\dots-\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=x_n$$

in cui sono presenti $n-1$ variabili elevate al secondo grado e solo una lineare, di primo grado.

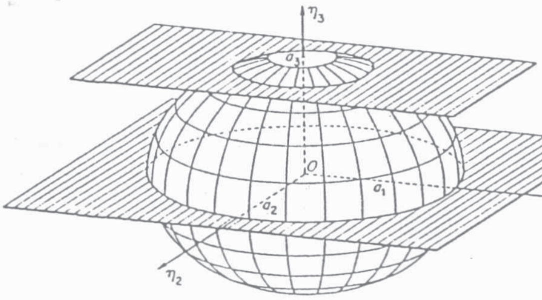
SONO QUADRICHE NON A CENTRO, NON DEGENERI MA $\det A = 0 \Rightarrow$ SINGOLARI. ($\det \tilde{A} \neq 0$)

SONO:
- se n è pari $\Rightarrow \frac{n}{2}$ TIPI DIVERSI
- se n è dispari $\Rightarrow \frac{n+1}{2}$ TIPI DIVERSI

caso $n=2$
e
caso $n=3$

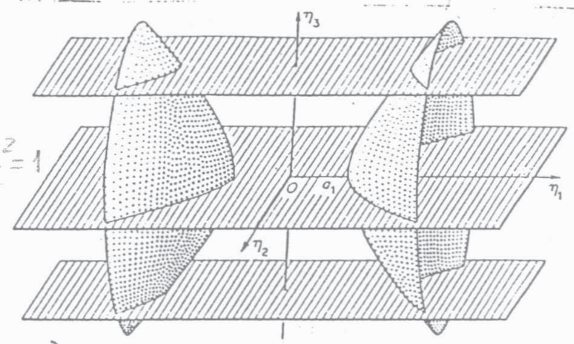
da fare per esercizio

DAL LIBRO DI SHILOV



ELLISSOIDE

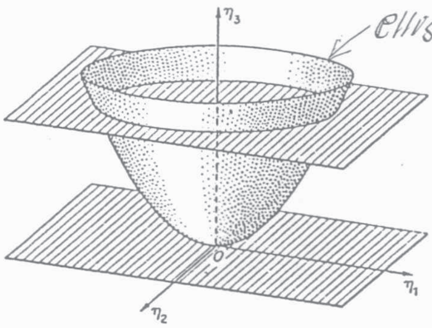
$x^2+y^2+z^2=1$



$x^2-y^2-z^2=1$

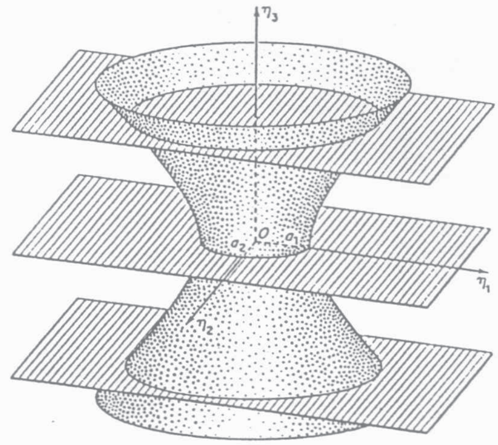
IPERBOLOIDE A 2 FALDE

ellisse (sezione piana)



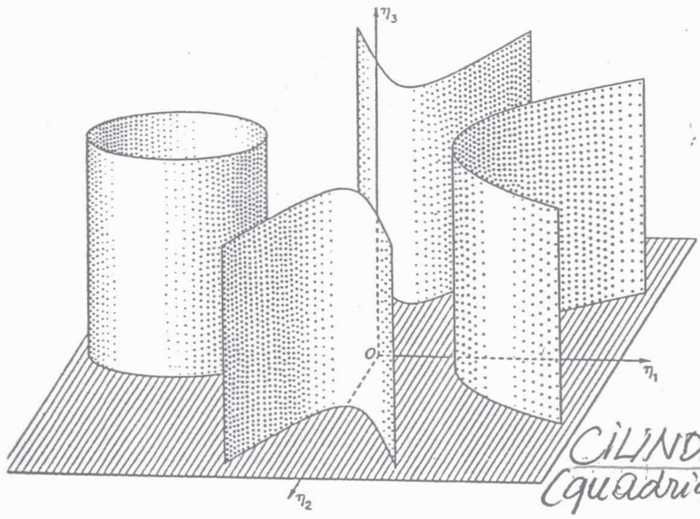
$x^2+y^2=z$

PARABOLOIDE ELLITTICO

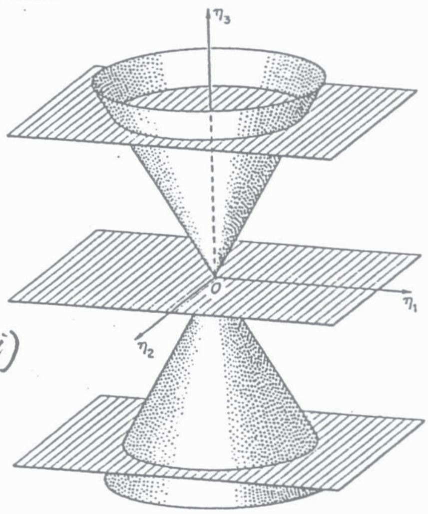


IPERBOLOIDE AD 1 FALDA

$x^2+y^2-z^2=1$



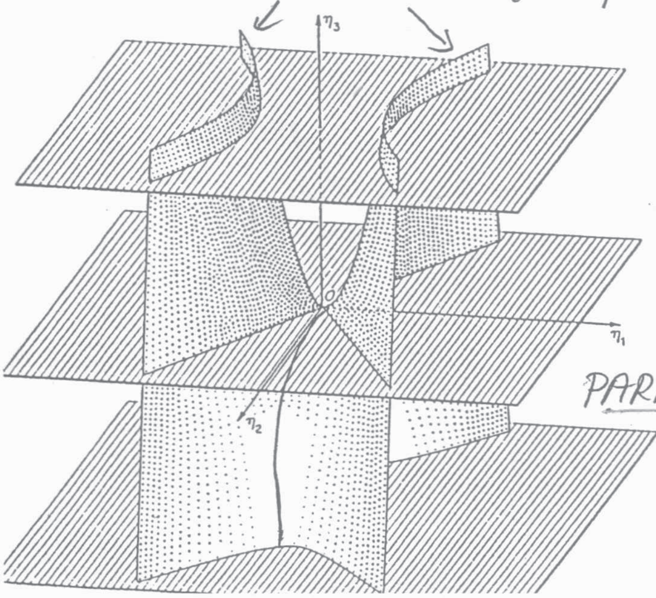
CILINDRI
(quadriche degeneri)



CONO QUADRICO

$x^2+y^2-z^2=0$

iperbole (sezione piana)



$x^2-y^2=z$

PARABOLOIDE IPERBOLICO

O SUPERFICIE A SELLA