18/04/16

Siano $v_1, \dots, v_k$ vettori in uno spazio euclideo V di dimensione n.

La matrice $\begin{pmatrix} v_1\cdot v_1 & v_1\cdot v_2 & \dots & v_1\cdot v_k \\ v_2\cdot v_1 & v_2\cdot v_2 & \dots & v_2\cdot v_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_k\cdot v_1 & v_k\cdot v_2 & \dots & v_k\cdot v_2 \end{pmatrix} \in M_{k\times k}$ detta <u>matrice di GRAM</u> dei vettori $v_1, \dots, v_k$

Se i vettori $v_1, \dots, v_k$ sono l. indip. $\Rightarrow$ la matrice di Gram è la matrice associata al prodotto scalare ristretto al sottospazio $\langle\langle v_1, \dots, v_k \rangle\rangle$

Il suo determinante è detto il GRAMIANO dei vettori $v_1, \dots, v_k$.

Se sono lin. indip. il gramiano è POSITIVO.

Se i vettori sono ortogonali $\Rightarrow$ La matrice di Gram è $\begin{pmatrix} v_1\cdot v_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_2\cdot v_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & v_k\cdot v_k \end{pmatrix}$

e quindi il Gramiano è $\|v_1\|^2 \|v_2\|^2 \dots \|v_k\|^2$.

Se i vettori non sono ortogonali $\Rightarrow$ il Gramiano $G(v_1, \dots, v_k) \leq \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 \dots \|v_k\|^2$

SI DIMOSTRA PER INDUZIONE SUL # k : PER $k=1$: $G(v_1) = v_1 \cdot v_1 = \|v_1\|^2$

Inoltre per una matrice 2x2 si dimostra:

Considero v_1, v_2 l. indip. $\Rightarrow$ abbiamo la matrice $A = \begin{pmatrix} v_1\cdot v_1 & v_1\cdot v_2 \\ v_2\cdot v_1 & v_2\cdot v_2 \end{pmatrix}$.

Ortogonalizzo i vettori dati cioè costruisco i vettori w_1, w_2, ortogonali TALI CHE

$\langle\langle w_1 \rangle\rangle = \langle\langle v_1 \rangle\rangle$ e $\langle\langle w_1, w_2 \rangle\rangle = \langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle \Rightarrow w_1 = v_1$ e pongo $v_2 = \alpha w_1 + w_2$

$\Rightarrow \boxed{w_2 = v_2 - \alpha w_1}$

$\Rightarrow$ In A sostituiamo w_1 a v_1 $\Rightarrow \begin{pmatrix} w_1\cdot w_1 & w_1\cdot v_2 \\ v_2\cdot w_1 & v_2\cdot v_2 \end{pmatrix}$: COSTRUIAMO MATRICI EQUIVALENTI MEDIANTE OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA E COLONNA:

$\underset{R_1 \to \alpha R_1}{\sim} \begin{pmatrix} \alpha w_1\cdot w_1 & w_1\cdot v_2 \\ \alpha v_2\cdot w_1 & v_2\cdot v_2 \end{pmatrix} \underset{R_2 \to C_2 - C_1}{\sim} \begin{pmatrix} w_1\cdot w_1 & w_1\cdot v_2 - \alpha w_1\cdot w_1 \\ \alpha v_2\cdot w_1 & v_2\cdot v_2 - \alpha v_2\cdot w_1 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} w_1\cdot w_1 & w_1\cdot (v_2 - \alpha w_1) \\ v_2\cdot w_1 & v_2\cdot (v_2 - \alpha w_1) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} w_1\cdot w_1 & w_1\cdot w_2 \\ v_2\cdot w_1 & v_2\cdot w_2 \end{pmatrix} \underset{R_2 - \alpha R_1 \to R_2}{\sim} \begin{pmatrix} w_1\cdot w_1 & w_1\cdot w_2 \\ v_2\cdot w_1 - \alpha w_1\cdot w_1 & v_2\cdot w_2 - \alpha w_1\cdot w_2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} w_1\cdot w_1 & w_1\cdot w_2 \\ (v_2 - \alpha w_1)\cdot w_1 & (v_2 - \alpha w_1)\cdot w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1\cdot w_1 & w_1\cdot w_2 \\ w_2\cdot w_1 & w_2\cdot w_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} w_1\cdot w_1 & 0 \\ 0 & w_2\cdot w_2 \end{pmatrix} \Rightarrow G(v_1, v_2) = \|w_1\|^2 \|w_2\|^2 < \|v_1\|^2 \|v_2\|^2$

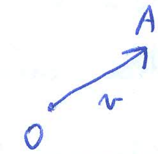
Analogamente $G(v_1, \dots, v_k) = \|w_1\|^2 \|w_2\|^2 \cdots \|w_k\|^2 < \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 \cdots \|v_k\|^2 \quad \forall k$

cvd

Se i vettori $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti $\Rightarrow$ $G(v_1, \dots, v_k) = 0$ e viceversa

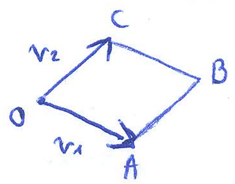
Interpretazione geometrica di $G(v_1, \dots, v_k)$.

Costruiamo un parallelepipedo sui vettori dati, cioè per $K=1$:



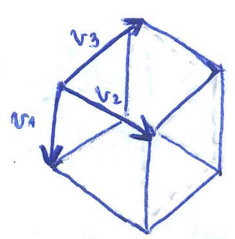
Il parallelepipedo costruito su v sarà il segmento OA.

Per $K=2$ $\Rightarrow$ dati v_1 e v_2



$\Rightarrow$ il parallelepipedo sarà il parallelogramma $OABC$ che giace sul piano da essi generato.

Per $K=3$



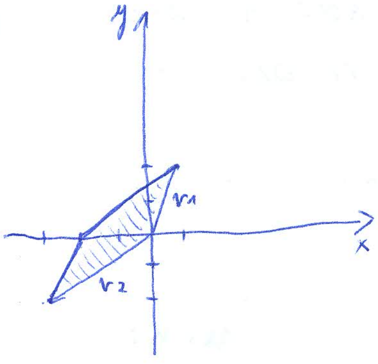
e così via.

PROPOSIZIONE

Volume del parallelepipedo costruito sui vettori $v_1, \dots, v_k = \sqrt{G(v_1, \dots, v_k)}$

ESEMPIO

Siano dati $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Vol}\, P(v_1, v_2) =$ Area del parallelogramma avente lati v_1 e v_2



$$\text{Area} = \sqrt{G(v_1, v_2)}$$

Costruisco $\begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -7 & 13 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow G(v_1, v_2) = 65 - 49 = 16 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Area} = 4}$

DIM. la PROPOSIZIONE (per INDUZIONE sul $\# K$ dei vettori)

1) Verifica per $K=1$.
Il volume cercato è la lunghezza del segmento cioè la norma del vettore

$$v = \|v\| = \sqrt{G(v)} = \sqrt{\|v\|^2}$$

2) Supposta vera la proposizione fino a $K=n$, la dimostriamo per $K=n+1$

Dati $v_1, \dots, v_{n+1}$ vettori l. ind. $\Rightarrow \sqrt{G(v_1,\dots,v_{n+1})} = Vol\, \mathcal{P}(v_1,\dots,v_{n+1}) =$

$$= \sqrt{\|w_1\|^2 \|w_2\|^2 \dots \|w_{n+1}\|^2} = \sqrt{\|w_1\|^2\|w_2\|^2 \dots \|w_n\|^2} \cdot \|w_{n+1}\| =$$

$$= \sqrt{G(v_1,\dots,v_n)} \cdot \|w_{n+1}\| = \underbrace{\underbrace{Vol\, \mathcal{P}(v_1,\dots,v_n)}_{\text{VOLUME PARALLELEPIPEDO COSTRUITO SU n VETTORI}} \cdot \underbrace{\|w_{n+1}\|}_{\text{ALTEZZA (PROIEZIONE ORTOGONALE SULLA PERPENDICOLARE A } \langle v_1,\dots,v_n\rangle)}}_{= Vol\, \mathcal{P}(v_1,\dots,v_{n+1})} = Vol\, \mathcal{P}(v_1,\dots,v_{n+1})$$

c.v.d.

PROPOSIZIONE

Sia data la base ORTONORMALE $B_{1n} = \{e_1,\dots,e_n\}$ in uno spazio euclideo n-dimensionale e siano $v_1,\dots,v_n$ vettori dello spazio dato

$\Rightarrow v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \Rightarrow$ posta $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \Rightarrow |G(v_1,\dots,v_n)| = (\det A)^2$

(Quindi poiché $\sqrt{G(v_1,\dots,v_n)} = Vol\, \mathcal{P}(v_1,\dots,v_n) \Rightarrow \det A = Vol\, \mathcal{P}(v_1,\dots,v_n)$)

DIMOSTRAZIONE

Le entrate della matrice di Gram sono date come $v_j \circ v_k = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ik}$; questa è l'entrata d_{jk} della matrice ottenuta come prodotto $A^T \cdot A \Rightarrow G(v_1,\dots,v_n) = \det(A^T A) = (\det A)^2$

$\Rightarrow Vol\, \mathcal{P}(v_1,\dots,v_n) = \det A$

cvd

Se ho il sistema $\Sigma: AX = B$ lineare non omogeneo non risolubile

$\rightarrow \Sigma$ può essere dato come $x_1 C_A^1 + x_2 C_A^2 + \dots + x_n C_A^n = B$

(Prosegue a pag 5)

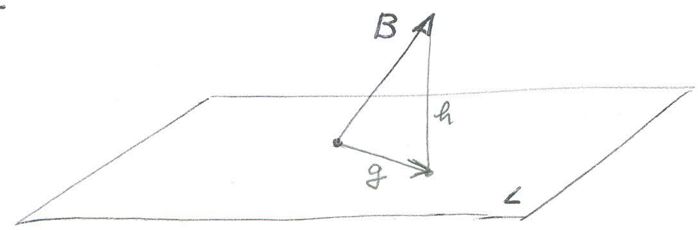
Consideriamo un sistema lineare non risolubile

Sia $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i \qquad i=1,\dots,n$

Vogliamo trovare un vettore che meglio approssima la soluzione. Se $B=(b_1,\dots,b_n) \Rightarrow B$ non sta nel sottospazio generato dalle colonne $A_1,\dots,A_m$
$\Rightarrow$ vogliamo trovare un vettore $g \in L(A_1,\dots,A_m)$ tale sia minima la differenza tra B e g cioè $\|B-g\|$ sia minima tra $\|B-g_k\|$ con $g_k \in L(\;)$.

$$\|B-g\| = \min_{g_k \in L} \|B-g_k\| = \delta$$

Questo vettore g è la proiezione ortogonale di B su L



δ è la norma della componente di B $\perp$ a L

$\Rightarrow$ troviamo $g = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_m A_m$ con

$B = g + h = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_m A_m + h$

$$\begin{cases} \langle B, A_1\rangle = \alpha_1 \langle A_1, A_1\rangle + \dots + \alpha_m \langle A_m, A_1\rangle + \underbrace{\langle h, A_1\rangle}_{=0} \\ \vdots \\ \langle B, A_m\rangle = \alpha_1 \langle A_1, A_m\rangle + \dots + \alpha_m \langle A_m, A_m\rangle + \overbrace{\langle h, A_m\rangle}^{0} \end{cases}$$

è un sistema lineare in α_j con m equazioni in m incognite, non omogeneo.

La matrice $A = G(A_1, \dots A_m)$ ha $\det A \neq 0$

$\Rightarrow$ il sistema è risolubile e si ha

$$\alpha_k = \frac{\begin{vmatrix} \langle A_1, A_1 \rangle & \cdots & \langle A_1, B \rangle & \cdots \\ & & & \end{vmatrix}}{|G(A_1, \dots, A_m)|}$$

$\Rightarrow h = B - g = B - \alpha_1 A_1 - \alpha_2 A_2 - \dots - \alpha_m A_m$

cerco $\|h\| = \delta$

Consideriamo il volume del parallelepipedo

$V_m^2 = V_{m-1}^2 \cdot \|h\|^2 \Rightarrow |G(B, A_1 \dots A_m)| =$

$= |G(A_1, \dots A_m)| \cdot \|h\|^2 \Rightarrow$

$$\|h\|^2 = \frac{|G(B, A_1, \dots, A_m)|}{|G(A_1, \dots, A_m)|}$$