- Il rango di una matrice è invariante per similitudine 16/12/15
- Anche il determinante è invariante per similitudine

<u>Proposizione</u> se $A, S \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tali che il $rg A = K$, $rg S = n$ [S invertibile $\to$ rg max]

$\Rightarrow rg\, A\cdot S = rg\, A = rg\, SA$

DIMOSTRIAMO CHE:

- $rg\, A\cdot S = rg\, A$

Siano $C_s^1, C_s^2, \dots C_s^n$ le colonne della matrice $S \Rightarrow$ le colonne di $A\cdot S$ sono del tipo $AC_s^1, AC_s^2, \dots, AC_s^N$

[ Ad Esempio: $A\,C_s^1$ : $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} \begin{pmatrix} S_{11} \\ \vdots \\ S_{n1} \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11}S_{11} + \dots + a_{1n}S_{n1} \\ \vdots \\ a_{n1}S_{11} + \dots + a_{nn}S_{n1} \end{pmatrix}_{n\times 1}$

$= S_{11}\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + S_{21}\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + S_{n1}\begin{pmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ ]

AS presenta colonne che sono combinazione lineare delle colonne di A. Di conseguenza $rg\, AS \leq rg\, A$

Ora considero la matrice $B = A\cdot S$ e la moltiplico per $S^{-1}$ A DESTRA;

$rg\, BS^{-1} \leq rg\, B$, ma $B\cdot S^{-1} = A\cdot S\cdot S^{-1} = A \Rightarrow$ [ $rg\, A \leq rg\, AS$ e $rg\, AS \leq rg\, A$ ]

$\left[ rg\, A = rg\, AS \right] \Leftarrow$

- DIMOSTRIAMO CHE $rg\, SA = rg\, A$:

Considerando la matrice SA, si ripete il ragionamento fatto usando le righe di S (invece che le colonne) ~~…~~ e si dimostra nello stesso modo che $rg\, SA = rg\, A$ c.v.d.

DIMOSTRIAMO ORA CHE IL RANGO È INVARIANTE PER SIMILITUDINE:

- Consideriamo $A \sim_s B \Rightarrow \exists$ una matrice S invertibile tale che $B = S^{-1}AS \Rightarrow rg\, B = rg(S^{-1}AS) = rg(S^{-1}A)S = rg(S^{-1}A) = rg\, A \Rightarrow rg\, B = rg\, A$ c.v.d.

Cerchiamo altri invarianti per similitudine:

Data la matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, considero la matrice $A - \lambda I$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esempio: Se $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow A-\lambda I = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 4-\lambda\end{pmatrix}$$

Ora calcolo il determinante di $(A-\lambda I)$, che prende il nome di: polinomio caratteristico della matrice A, essendo un polinomio nella variabile $\lambda$:

$$\det = \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 4-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 = \lambda^2-5\lambda-2$$

il grado del polinomio (in questo caso 2) coincide con l'ordine della matrice A. Le radici del polinomio si chiamano radici caratteristiche della matrice A

Es $M_{3\times3}$ $\begin{pmatrix}a_{11}-\lambda & \vdots & \vdots\\ \vdots & a_{22}-\lambda & \vdots\\ \vdots & \vdots & a_{33}-\lambda\end{pmatrix}$ il coefficiente del termine di grado max è $-1$

In generale se l'ordine della matrice è:

- pari $\Rightarrow$ coeff. del termine del grado max è 1
- dispari $\Rightarrow$ coeff. del termine del grado max è $-1$

Nei testi il polinomio caratteristico è $|\lambda I - A|$, in questo modo il coeff. di grado massimo è SEMPRE +1 (Tale polinomio ~~caratteristico~~ si chiama MONICO)

Se il polinomio è monico, la scomposizione è più semplice ED È DEL TIPO $(\lambda-\lambda_0)^{k_0}(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\dots$ DOVE $\lambda_0, \lambda_1 \dots$ SONO LE RADICI

Ricordo che la molteplicità di una radice $\lambda_0$ di un polinomio ~~~~ coincide con il grado ~~~~ massimo con cui compare il polinomio $(\lambda-\lambda_0)$ nella scomposizione del polinomio dato.

Esempio 1: $\lambda^2-5\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{5\pm\sqrt{25+8}}{2}$ $\lambda = \dfrac{5-\sqrt{33}}{2}$, $\lambda = \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$

$$\lambda^2-5\lambda-2 = \left(\lambda - \frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)\left(\lambda-\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)$$

la molteplicità $\mu$ delle radici è:

$\mu\left(\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)=1 \qquad \mu\left(\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)=1$

radici semplici $(\mu=1)$

Esempio 2 $(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

$\mu(1)=2$ doppia

$\mu(2)=1$ semplice

- Il polinomio caratteristico è un invariante per similitudine

Infatti: siano $A, B \in M_{n\times n}$ simili $\Rightarrow \exists S$ invertibile t.c. $B=S^{-1}AS$

$\Rightarrow$ il polinomio caratteristico di $B$ è $|B-\lambda I| = |S^{-1}AS-\lambda I|$

$\Rightarrow |S^{-1}AS-\lambda S^{-1}S| = |S^{-1}(AS-\lambda S)| = |S^{-1}(A-\lambda I)S| =$

$\Rightarrow |S^{-1}||A-\lambda I||S| = |S|^{-1}|A-\lambda I||S| = 1\cdot|A-\lambda I| =$

$\Rightarrow$ Polinomio caratteristico di $A = P_A(\lambda)$

$P_B(\lambda)=P_A(\lambda)$: i polinomi caratteristici coincidono cvd

La classe di equivalenza $\overbrace{\text{delle}}^{\text{È CARATTERIZZATA}}$ matrici simili CHE HANNO lo stesso polinomio caratteristico e le stesse radici CARATTERISTICHE.

Analizziamo il polinomio caratteristico di $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ che è $\lambda^2-5\lambda-2$: guardiamo i coefficienti del polinomio $|\lambda I-A|$ il termine noto $(-2)$ è il determinante della matrice $A$

I minori principali $\overbrace{\text{della}}^{\text{DI ORDINE 1}}$ matrice sono 1 e 4. Il coefficiente del termine di 1° grado è dato dalla somma dei minori principali, cambiata di segno. Che corrisponde alla <u>traccia di A</u>

In generale: $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n$ ~~dove $a_k = \sum$ Minori principali di ordine K~~ dove $\boxed{a_K=(-1)^K\sum \text{Minori principali di ordine } K}$

Traccia di A

$(-1)^n\cdot$ determinante di A

Siccome il polinomio caratteristico è invariante, sono invarianti anche i suoi coefficienti $\to$ è invariante anche la Traccia.

Consideriamo un operatore $T: V \to V$, $\dim V = n$

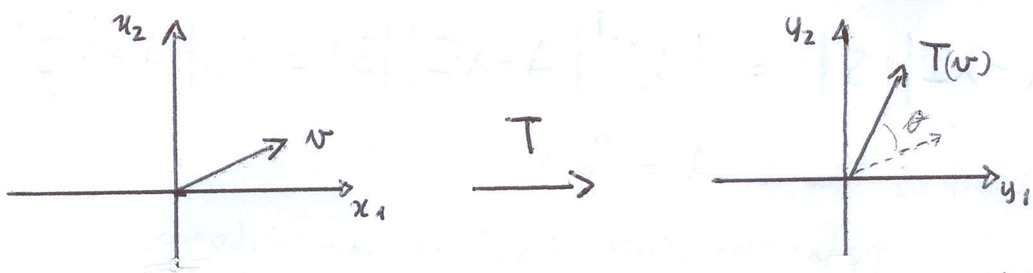
<u>Def</u>: si dice <u>sottospazio</u> <u>invariante</u> per $T$, quel sottospazio $W$ di $V$, tale che l'immagine di $W$ è contenuta in $W$

$L(W) \subseteq W$

- $0$ visto come sottospazio è invariante <u>$\forall\, T$</u> (banale)
- $T(V) \subseteq V \Rightarrow V$ stesso è sottospazio invariante (banale)

<u>Esempio</u> $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rotazione di un angolo $\vartheta$

con $0 < \vartheta < \pi$ $\qquad \vartheta = \measuredangle$




POICHÈ I SOTTOSPAZI DI $\mathbb{R}^2$ NON BANALI SONO LE RETTE PER L'ORIGINE, CI CHIEDIAMO SE ci sono rette passanti per l'origine che sono invarianti (ovvero che se subiscono una rotazione, si sovrappongono a loro stesse)

Se $\vartheta = 0$ ($T$ = identità) $\Rightarrow$ tutti i sottospazi sono invarianti

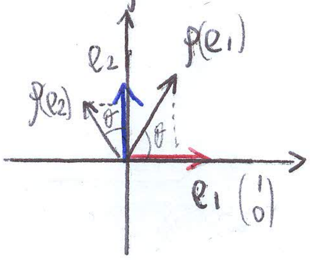
Se $\vartheta = \pi$ $\to$ tutti i sottospazi sono invarianti, i vettori cambiano tutti ma appartengono ancora alla retta passante per l'origine

Se $0 < \vartheta < \pi$ $\to$ la rotazione non ha sottospazi invarianti (a parte i due banali)

- Matrice associata (a $\rho$) alla rotazione dell'angolo $\theta$

Considero le basi canoniche nel dominio e nel codominio.

Cerco $\rho(e_1)$ e $\rho(e_2)$




$\rho(e_1) = (\cos\theta, \sin\theta)$

$\rho(e_2) = (-\sin\theta, \cos\theta)$

$$[\rho]_{\rho}^{\rho} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \text{Matrice delle rotazioni}$$

<u>Esercizio</u> Trovare la Matrice associata all'identità quando passo dalla base canonica (nel dominio) $\mathcal{C}$ ad una ottenuta ruotando i vettori di base di un angolo $0<\theta<\pi$ in verso antiorario