SISTEMI LINEARI NON OMOGENEI

SIA Σ UN SISTEMA LINEARE NON OMOGENEO DI p EQUAZIONI ED n VARIABILI Σ $AX=B$ CON $A \in M_{p \times n}$ $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$: NON HA SEMPRE SOLUZIONE

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI: IL SISTEMA $AX=B$ HA SOLUZIONE $\Leftrightarrow$ $rg\, A = rg(A{:}B)$

DIMOSTRAZIONE "$\Rightarrow$" (NECESSITÀ) SIA $\lambda=(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ SOLUZIONE DI $\Sigma \Rightarrow A\lambda = B$ OPPURE $\lambda_1 C_A^1 + \lambda_2 C_A^2 + \dots + \lambda_n C_A^n = B \Rightarrow$ DIRE CHE $\lambda \in Sol\,\Sigma$ EQUIVALE AD ASSERIRE CHE B È COMBINAZIONE LINEARE DELLE COLONNE DI $A \Rightarrow rg\, A = rg(A{:}B)$

"$\Leftarrow$" (SUFFICIENZA) RIPERCORRERE A RITROSO LA DIMOSTRAZIONE FATTA

c.v.d.

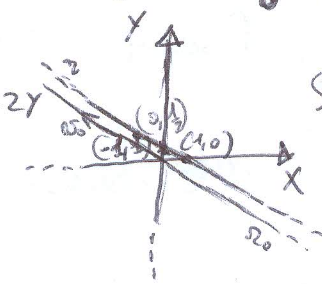
ES. $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -2x-4y+2z=-2 \end{cases}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\, A = 1$ $(A{:}B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & 2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow rg(A{:}B)=1$

$Sol\,\Sigma \neq \emptyset$

IN $\mathbb{R}^2$ $x+2y=1$ $A=(1\ 2) \Rightarrow rg=1$ $rg(1\ 2 {:} 1)=1 \Rightarrow$ IL SISTEMA HA SOLUZIONE

CERCO LE SOLUZIONI $x=1-2y$

$Sol\,\Sigma$ È UNA RETTA: r



SE Σ $x+2y=1 \Rightarrow \Sigma_0$ $x+2y=0$

$x=-2y$

x	y
-2	1

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ SOLUZIONE FONDAMENTALE DI Σ_0

$Sol\,\Sigma_0$ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE 1-DIMENSIONALE (È r_0) $\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=-2t \\ y=t \end{cases}$ EQUAZIONE PARAMETRICA DI r_0

(CHE INDIVIDUA PUNTO DELLA RETTA r, AD ESEMPIO) PRESO UN QUALSIASI VETTORE $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, SOMMATO AD UN QUALSIASI ALTRO VETTORE GIACENTE SU r_0, OTTENGO TUTTI I PUNTI DI r.

RIVEDENDO LE RETTE COME SPAZI DELLE SOLUZIONI DEI SISTEMI Σ E Σ_0, ABBIAMO LA

PROPOSIZIONE UNA SOLUZIONE QUALUNQUE DEL SISTEMA LINEARE NON OMOGENEO $\Sigma: AX=B$ SI OTTIENE SOMMANDO UNA SOLUZIONE DEL SISTEMA LINEARE OMOGENEO ASSOCIATO $\Sigma_0: AX=0$ AD UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DI Σ

DIMOSTRAZIONE Data una soluzione particolare X_0 di Σ e una soluzione V_0 di $\Sigma_0 \Rightarrow V_0+X_0$ è soluzione di Σ $\Rightarrow$ voglio dimostrare che $A(V_0+X_0)=B$, ma so che $AX_0=B$ e $AV_0=0 \Rightarrow A(V_0+X_0)=$
$= AV_0+AX_0 = 0+B = B$

Viceversa dobbiamo dimostrare che ogni soluzione di Σ è somma della soluzione particolare X_0 di Σ e di una soluzione di Σ_0.

Sia $\tilde{X} \in Sol\,\Sigma \Rightarrow A\tilde{X}=B \Rightarrow A\tilde{X}=AX_0 \Rightarrow A\tilde{X}-AX_0=0 \Rightarrow A(\tilde{X}-X_0)=0 \Rightarrow$
$\tilde{X}-X_0 \in Sol\,\Sigma_0 \Rightarrow \tilde{X}-X_0=V_0$ con $AV_0=0 \Rightarrow \tilde{X}=X_0+V_0$ C.V.D.

Quindi conseguentemente $Sol\,\Sigma = Sol\,\Sigma_0 + X_0$ cioé $Sol\,\Sigma$ è ottenuto traslando $Sol\,\Sigma_0$ di un vettore X_0

DEFINIZIONE In uno spazio vettoriale V si definisce traslazione di vettore V_0 la funzione T $V \longrightarrow V$ tale che $T(V)=V+V_0$ con $V_0 \in V$ e $\forall v \in V$

T è biettiva: è 1-1 (iniettiva)? Si. Poniamo $\underset{T(V_1)}{V_1+V_0} = \underset{T(V_2)}{V_2+V_0} \Rightarrow V_1+\cancel{V_0}-V_0 = V_2+\cancel{V_0}-V_0$

Si!

è suriettiva? Si. Sia $w \in$ Codominio di $T \Rightarrow \exists\, v \in$ Dominio di T tale che $T(v)=w$?
cioé $v+V_0=w$? Si, basta prendere $V=w-V_0$

DEFINIZIONE Si dice sottospazio affine di V il sottoinsieme di V ottenuto traslando un sottospazio vettoriale. Il vettore che definisce la traslazione non è unico, si può prendere un qualunque punto appartenente al sottospazio affine e tale punto individua il vettore traslazione cercato.

DATO UN SOTTOSPAZIO AFFINE $\mathcal{Q} \subset V \Rightarrow$ ESISTE UN UNICO SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V, DI CUI $\mathcal{Q}$ È IL TRASLATO. TALE SOTTOSPAZIO VETTORIALE È DETTO <u>DIREZIONE</u> O <u>GIACITURA</u> DEL SOTTOSPAZIO AFFINE $\mathcal{Q}$

<u>DEFINIZIONE</u> LA DIMENSIONE DI UN SOTTOSPAZIO AFFINE È DEFINITA COME LA DIMENSIONE DEL SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI CUI È IL TRASLATO

<u>DEFINIZIONE</u> DUE SOTTOSPAZI AFFINI SI DICONO <u>PARALLELI</u> SE LA DIREZIONE DEL SOTTOSPAZIO AFFINE DI DIMENSIONE MINORE È CONTENUTA NELLA DIREZIONE DELL'ALTRO SOTTOSPAZIO

ESERCIZIO LE RETTE $r: x+y-3=0$ ED $s: 2x-3y-1=0$ SONO PARALLELE?

DEVO ESAMINARE $r_0: x+y=0$ E $s_0: 2x-3y=0 \Rightarrow r_0: y=-x \Rightarrow v=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \in Sol\, \Sigma_0 \Rightarrow$

$r_0 = \langle\langle \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \rangle\rangle$ $\quad 2x-3y=0 \quad y=\frac{2}{3}x \Rightarrow s_0 = \langle\langle \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \rangle\rangle$ $\quad rg\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & 2\end{pmatrix} = 2 \Rightarrow r \nparallel r$

<u>ESERCIZIO</u>

IN $\mathbb{R}^3$ SIA $\pi: x+y+z=1$ ED $r: \begin{cases} 3x-2y=2 \\ 2x+2y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow r \parallel \pi$?

$\pi_0: x+y+z=0$

$r_0: \begin{cases} 3x-2y=0 \\ 2x+2y+2z=0 \end{cases}$