16/05/2016

Riprendiamo il discorso delle matrici simmetriche.

Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ spazio euclideo, un operatore simmetrico: fissata una base $\perp_n$ di $\mathbb{R}_n$, $\mathcal{B}_{\perp_n}$, $\Rightarrow$ la matrice $[T]_{\mathcal{B}_{\perp_n}} = A$ è simmetrica:

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$$

Considero l'applicazione $q(v) = T(v) \circ v$ con $v \in \mathbb{R}^n$

$q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e q è una forma quadratica (verificare a casa)

Cerco $[q]_{\mathcal{B}_{\perp_n}} \Rightarrow$ pongo $[v]_{\mathcal{B}_{\perp_n}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $[T(v)]_{\mathcal{B}_{\perp_n}} = [T]_{\mathcal{B}_{\perp_n}} [v]_{\mathcal{B}_{\perp_n}}$

Se $\mathcal{B}_{\perp_n} = \{v_1, \dots, v_n\}$, si ha $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, $T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(v_i)$

dove $\underline{T(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} v_j}$

Adesso vediamo cosa vale $q(v) = T(v) \circ v \Rightarrow q(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(v_i) \circ v$

$q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(v_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_j v_j = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j T(v_i) \cdot v_j$ sfruttando le proprietà del prodotto scalare

$= \underline{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j}$

È quindi dimostrato che in una base $\perp_n$ di $\mathbb{R}^n$, T e q hanno la stessa matrice associata. È quindi possibile diagonalizzare la matrice simmetrica e trovare la forma canonica della forma quadratica.

DEFINIZIONE: Si dice "quadrica" il luogo dei punti di $\mathbb{R}^n$ che soddisfano ad un'equazione definita da un polinomio di 2° grado nelle coordinate di $\mathbb{R}^n$

es. (quadrica in $\mathbb{R}^2$):

Dette x, y le coordinate di $\mathbb{R}^2$ una "quadrica" è data dall'equazione

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1 x + b_2 y + C = 0$$

(2)

Le quadriche di $\mathbb{R}^2$ sono delle curve del piano dette CONICHE. Le EQUAZIONI DELLE quadriche sono composte dalle equazioni di una forma quadratica, di una forma lineare e un termine noto.

L'equazione di una quadrica nelle n variabili di $\mathbb{R}^n$ è:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k x_k + c = 0$$

quindi abbiamo messo in evidenza:

- PARTE QUADRATICA : $Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$
- PARTE LINEARE : $L(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k x_k$
- TERMINE NOTO : c

Quindi la quadrica può essere riscritta come

$$Q(x) + L(x) + c = 0$$

Ciò che si vorrà fare sarà:

- Classificazione del tipo di coniche nel piano, E IN GENERALE DI QUADRICHE NELLO SPAZIO N-DIMENSIONALE
- Riconoscere le quadriche a partire dalle equazioni

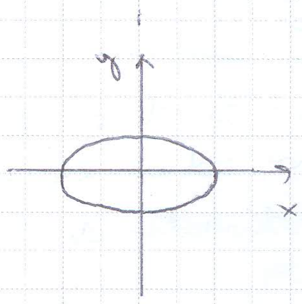
CLASSIFICAZIONE:

Una prima divisione è tra quadriche DEGENERI e quadriche NON DEGENERI. Alcuni esempi ~~sono~~ di CONICHE NON DEGENERI:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \longrightarrow$ ellisse

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \longrightarrow$ iperbole

$y = ax^2 \longrightarrow$ parabola



esempio di ellisse

IN ALCUNE quadriche esiste un punto ~~detto~~ di simmetria per il quale ~~vale che~~ se un punto sta sulla curva anche il suo rispettivo simmetrico ~~[illegible]~~ rispetto A TALE PUNTO CI STA; ESSO È DETTO CENTRO

16/05/2016 ③

Esprimere l'equazione della quadrica rispetto ad un sistema di riferimento OPPORTUNO, AD ESEMPIO centrato nel punto di simmetria (SE ESISTE), SIGNIFICA DARE la forma canonica ~~q~~ della forma quadrica E DI TUTTA L'EQUAZIONE.

es.

$$\underbrace{x^2-4xy-2y^2}_{q\binom{x}{y}}\underbrace{-3x-3y}_{l\binom{x}{y}}+\underbrace{5}_{c}=0$$

Prima di tutto riduciamo la forma quadratica $q(x)$ in forma canonica mediante un cambiamento di coordinate

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & -2\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(-2-\lambda)-4=0$$

$$-2-\lambda+2\lambda+\lambda^2-4=0\Longrightarrow\lambda^2-\lambda+6=0$$

$$\lambda=\frac{-1\pm5}{2}\begin{cases}-3\\ 2\end{cases}$$

Cerco gli autospazi $E_{-3}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=-2x+y=0$ $\boxed{y=2x}$

$v_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\Longrightarrow u_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$ dove u_1 è normalizzato

$E_2=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Longrightarrow x=-2y\Longrightarrow v_2\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}-2/\sqrt5\\ 1/\sqrt5\end{pmatrix}$

Questi vettori v_1, v_2 devono essere ortogonali e infatti lo sono PERCHÉ AUTOVETTORI DI UN OPERATORE SIMMETRICO, RIFERITI AD AUTOVALORI DIVERSI. La base perciò risulta

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\right\}$$ ED È UNA BASE ORTONORMALE

La matrice S associata al cambiamento di coordinate in $\mathcal{B}$

è $S=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}s\\ t\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt5}s-\frac{2}{\sqrt5}t\\ y=\frac{2}{\sqrt5}s+\frac{1}{\sqrt5}t\end{cases}\Longrightarrow-3s^2+2t^2-\frac{3}{\sqrt5}s+\frac{6}{\sqrt5}t-\frac{6}{\sqrt5}s-\frac{3}{\sqrt5}t+5=0$$

Sommando i termini simili risulta

$$-3s^2+2t^2-\frac{9}{\sqrt{5}}s+\frac{3}{\sqrt{5}}t+5=0$$

Si applica la riduzione ai quadrati per traslare il sistema di riferimento nel punto di simmetria

$$-3\left(s^2+\frac{3}{\sqrt{5}}s\right)+2\left(t^2+\frac{3}{2\sqrt{5}}t\right)+5=0$$

Si applica il metodo di Gauss

$$-3\left[\left(s+\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2-\frac{9}{20}\right]+2\left[\left(t+\frac{3}{4\sqrt{5}}\right)^2-\frac{9}{80}\right]+5=0$$

Cambio le coordinate

$$\begin{cases} v = s+\dfrac{3}{2\sqrt{5}} \\ z = t+\dfrac{3}{4\sqrt{5}} \end{cases}$$

Ciò che caratterizza le ~~coniche~~ QUADRICHE è la segnatura data dal TEOREMA DI SILVESTER. In questo caso $s(1,1)$ caratterizza un'iperbole. Ritornando all'esercizio

$$-3v^2+2z^2+\frac{27}{20}-\frac{18}{80}+5=0$$

$$-3v^2+2z^2+\frac{49}{8}=0$$

$$-\frac{v^2}{\frac{1}{3}}+\frac{z^2}{\frac{1}{2}}=-\frac{49}{8}$$

$$\frac{v^2}{\frac{49}{24}}-\frac{z^2}{\frac{49}{16}}=1$$

$$\frac{v^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1 \Longrightarrow \text{iperbole}$$