16/03

CONSIDERIAMO un campo con un numero finito di elementi, come $\mathbb{Z}_2$ (prende tutti i resti della divisione per due). (QUINDI SI HANNO SOLO 2 CLASSI DI RESTO $\bar{0}$ e $\bar{1}$)

cioè $\rightarrow$ $m = 2K + r \Rightarrow m R m$ se nella divisione per due hanno lo stesso resto : $r = r_1$: ($m = 2p + r_1$)

Considero $\{\bar{0}, \bar{1}\}$ (classe) con le operazioni $+$ e $\cdot$ "estese" da $\mathbb{Z}$: è un campo : $\mathbb{Z}_2$

$\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$

$\bar{0} + \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{1} + \bar{0} = \bar{1}$

$\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$ ← perché il resto è 0

← VEDIAMO COME AGISCE L'OPERAZIONE DI SOMMA FRA GLI ELEMENTI DI $\mathbb{Z}_2$

IN $\mathbb{Z}_2$ CI SONO SOLO $2^1 = 2$ ELEMENTI. IN GENERALE IN UN CAMPO FINITO ci sono esattamente p^n elementi con p # primo

Se $\forall x \in$ campo $\Rightarrow px = \underbrace{x + \ldots + x}_{p} = 0$ (sommo x con se stesso p volte) $\Rightarrow$ si dice che il campo ha caratteristica p.

Tale definizione si estende a campi con un numero # infinito di elementi: LA CARATTERISTICA DEL CAMPO È LO SCALARE p CHE MOLTIPLICATO $\forall$ ELEMENTO DEL CAMPO DIA COME risultato della moltiplicazione $\boxed{\text{zero}}$ (intendendo che p ora può essere qualunque)

Per esempio: Char $\mathbb{R} = 0$; Char $\mathbb{C} = 0$; Char $\mathbb{Q} = 0$; Char $\mathbb{Z}_2 = 2$

In $\mathbb{Z}_2$ non posso dividere per 2, perché per $\mathbb{Z}_2$, 2, è come 0

Esempio di diversità di comportamento in campi con caratteristica diversa da 0.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ è invertibile? in $\mathbb{R}$ sì! In $\mathbb{Z}_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ la matrice non è invertibile!

IL DETERMINANTE È -2. CHE IN $\mathbb{Z}_2$ è come fosse zero $\Rightarrow$ det nullo $\Rightarrow$ non invertibile!

Stanno nella stessa classe di equivalenza

2) In $\mathbb{Z}_2$ le forme bilineari alternanti sono sempre simmetriche, mentre in $\mathbb{R}$ l'unica applicazione alternante e simmetrica simultaneamente è quella nulla.

Consideriamo forme bilineari reali $F: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ Sia F simmetrica:

due vettori $v, w \in V$ si dicono F-coniugati (o F-ortogonali) se $F((v, w)) = 0$

Osservazione: ① il vettore nullo di V è F-coniugato ad ogni altro vettore di V.

② Siano $v_1, \ldots, v_K$ vettori F-coniugati a $w \in V \Rightarrow F((v_j, w)) = 0 \ \forall j = 1, \ldots, K \Rightarrow$ ogni loro combinazione lineare $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_K v_K$ è F-coniugata al vettore w

Infatti $F((\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_K v_K, w)) = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i F((v_j, w)) = 0$

ESERCIZIO: Data $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto x_1 y_2 + x_2 y_1$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to v$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \to w$

=> 1) F é simmetrica

2) Trovare i vettori F-coniugati al vettore $v \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

1)

Fisso $\mathcal{C}$ in $\mathbb{R}^2$ ($\mathcal{C}$ BASE CANONICA)

Cerco $[F]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} F((e_1,e_1)) & F((e_1,e_2)) \\ F((e_2,e_1)) & F((e_2,e_2)) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{prodotto incrociato}}$ => F é simmetrica

2) Cerco i vettori $\tilde{v} \in \mathbb{R}^2$ tali che $F((\tilde{v}, v)) = 0$ => pongo $\tilde{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ => $F\left(\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right)\right) =$

$-2x + 3y = 0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}^{\perp}$: Tutti i vettori di tale retta sono F-ortogonali a $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ c.v.d.

PROPOSIZIONE:
In generale dato $v \in V$, l'insieme dei vettori F-ortogonali a v è un sottospazio vettoriale di V: esso si indica $\boxed{v^{\perp}}$ (DA DIMOSTRARE)

Analogamente posso trovare, dato un sottospazio W di V, il suo complemento F-ortogonale cioé $W^{\perp}$: $W^{\perp} = \{ v \in V \mid F((v,w)) = 0 \ \forall w \in W \}$

Proposizione: Se $W < V \Rightarrow W^{\perp} < V$ (da dimostrare)

PROPOSIZIONE:
Dato $W < V$, per cercare $W^{\perp}$ è sufficiente cercare $v \in V$ tali che $F((v, w_j)) = 0$ $\forall j = 1, \dots, K$ con $B_W = \{w_1, \dots, w_K\}$ (da dimostrare)

ESEMPIO considero in $\mathbb{R}^2$: $r: x+y=0$ cerco $r^{\perp} \Rightarrow \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid F((v,w)) = 0 \ \forall w \in r \}$ => (F È QUELLA DATA NELL'ESERCIZIO SOPRA)

Do una base di r: $B_r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ => cerco $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid F\left(\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\right) = 0 \Rightarrow \boxed{-x+y=0} = r^{\perp}$

Definizione: Data $F: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica, un vettore $v \neq 0$ è detto ISOTROPO (o F-ISOTROPO) se $F((v,v)) = 0$

Esempio data $F\left(\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)\right) = x_1 y_2 + x_2 y_1$, $\exists$ vettori isotropi? $F\left(\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)\right) = 2x_1 x_2 = 0$

I vettori isotropi stanno sulle rette $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ c.v.d

ESERCIZIO: Dimostrare che due vettori $v, w \in V$, F-coniugati, non F-isotropi, con $F: V \times V \to \mathbb{R}$, bilineare simmetrica, SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

Definizione: Una base B_V, di uno spazio vett. V é detta F-ortogonale, $F: V \times V \to \mathbb{R}$ bil. simm, se è formata da vettori F-ortogonali. (o F-CONIUGATI)

Def: Una base B_V di " " " è detta F-ortonormale, se i suoi vettori sono F-ortogonali e $F((v_j, v_j)) = 1$ $\forall v_j \in B_V$

OSSERVAZIONE: Se F È FORMA BIL. SIMM. e B_V È BASE F-ORTOGONALE => $[F]_{B_V}$ È DIAGONALE.

ESEMPIO:
Considero $F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 1) F è simmetrica, 2) Det una base F-ortonormale di $\mathbb{R}^3$
$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) \longmapsto x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Proposizione: Sia V uno sp. vett n-dimensionale, $F\ V \times V \to \mathbb{R}$ forma bil. simm, $U < V$ U privo di vettori isotropi, con $\dim U = K$, $\Rightarrow U^\perp$ è sottosp. vett. di dim. $n-K$ e $U \oplus U^\perp = V$

Dimostr: 1° oss) La somma tra U e $U^\perp$ è diretta? cioè $U \cap U^\perp = \{0\}$?
se $u \in U \cap U^\perp \Rightarrow F((u,u)) = 0 \Rightarrow u = 0$ per ipotesi.
deve essere ortogonale anche a se stesso, l'unica possibilità è che sia vett. nullo

2) Cerco i vettori $v \in V \mid F((v,u)) = 0 \ \forall u \in U$ data $B_U = \{u_1, \dots, u_K\} \Rightarrow$ cerco $v \in V \mid$
$F((v, u_j)) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, K$ (facendo variare $u_j \in B_U$, avrò un sistema.)
Posto $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \Rightarrow F((\sum \alpha_i v_i, u_j)) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, K.$

$\Rightarrow$ otteniamo un sistema lineare omogeneo di cui bisogna determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni. che sarà la dim $U^\perp$.

Osservazione: poiché $U \oplus U^\perp = V$ ($\forall U < V$ privo di vettori F-isotropi) $\Rightarrow$ ogni $v \in V$ si può scrivere sempre come somma di due vettori u, w / $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in U^\perp$:
u è la proiezione F-ortogonale di V su U e w è la proiez. F-ortogonale di v su $U^\perp$