14/12/2015

Proposizione: Sia $L: V \to W$ appl. continua biettiva $\Rightarrow \exists\, L^{-1}: W \to V$

Fissate le basi di B_V e B_W negli spazi vettoriali $\Rightarrow [L^{-1}]^{B_V}_{B_W} = \left([L]^{B_W}_{B_V}\right)^{-1}$

Dimostrazione: So che $L^{-1} \circ L: V \to V = id_V$ e $L \circ L^{-1} = id_W$ (identità)

$\Rightarrow [L^{-1} \circ L]^{B_V}_{B_V} = I = [L^{-1}]^{B_V}_{B_W} \cdot [L]^{B_W}_{B_V}$ (prodotto matriciale = m. identità) $\Rightarrow$

$$[L^{-1}]^{B_V}_{B_W} = \left([L]^{B_W}_{B_V}\right)^{-1}$$

c.v.d.

ESERCIZIO

Sia $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'appl. lineare che nella basi $B_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ nel dominio e $B_2 = \left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right\}$ nel codominio è associata alla matrice $A = \begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & 0\end{pmatrix}$

dare L mediante le coordinate (x, y) di $\mathbb{R}^2$

$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y) \to (x', y')$

SVOLGIMENTO: CERCO $M = [L]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ TALE CHE

$L(v) = Mv \Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} & (\mathbb{R}^2, B_1) \arrow[r, "L", "A"'] & (\mathbb{R}^2, B_2) \arrow[dl, "id_2"] \\ (\mathbb{R}^2, \mathcal{E}) \arrow[ur, "id_1"] \arrow[r, "L", "{[L]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}}"'] & (\mathbb{R}^2, \mathcal{E}) & \end{tikzcd}$$

(ad L è associata la matrice A)

$\Rightarrow L = id_2 \circ L \circ id_1$

$$[L]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = [id_2 \circ L \circ id_1]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = [id_2]^{\mathcal{E}}_{B_2}\, [L]^{B_2}_{B_1}\, [id_1]^{B_1}_{\mathcal{E}}$$

$[id_2]^{\mathcal{E}}_{B_2} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $\qquad [id_1]^{B_1}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix}$

$id\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$id\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \beta_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

e le due applicazioni id_1 e id_2 sono una l'inversa dell'altra (la loro composizione dà l'identità)

ANCHE LE MATRICI SONO UNA L'INVERSA DELL'ALTRA:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{array}\right) \overset{R_1 - R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1\end{array}\right) \overset{R_1 + R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{array}\right) \Rightarrow [id_1]^{B_1}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}0 & 6\\ -4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6 & 6\\ -8 & 4\end{pmatrix} = [L]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$$

$$L((x,y)) = \begin{pmatrix}-6 & 6\\ -8 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6x + 6y\\ -8x + 4y\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \quad (x',y') = (-6x+6y, -8x+4y)\end{array}$$

Sia $T: V \to V$ un operatore (appl. lin.) e sia B la base nel dominio e nel codominio e $[T]^B_B$ la matrice associata a T nella base data

Se do a V la base $\tilde{B} \Rightarrow$ ho un'altra matrice associata a T: $[T]^{\tilde{B}}_{\tilde{B}}$

(che legame c'è tra le due matrici?)

a livello di applicazioni abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
(V,B) \arrow[r, "T"] & (V,B) \arrow[d, "id_2"] \\
(V,\tilde{B}) \arrow[u, "id_1"] \arrow[r, "T"] & (V,\tilde{B})
\end{tikzcd}
\qquad \Rightarrow \quad T = id_2 \circ T \circ id_1 \Rightarrow [T]^{\tilde{B}}_{\tilde{B}} = [id_2]^{\tilde{B}}_{B}\,[T]^{B}_{B}\,[id_1]^{B}_{\tilde{B}}$$

id_1 e id_2 sono ancora una l'inversa dell' altra.

$id_2 \circ id_1 : (V,\tilde{B}) \xrightarrow[id]{} (V,\tilde{B})$ (la composizione dà l'identità)

Se la matrice associata $[id_2]^{\tilde{B}}_{B} = S$ $\Rightarrow$ la matrice associata $[id_1]^{B}_{\tilde{B}} = S^{-1}$

(Poiché le matrice S ha rango max $\Rightarrow \det S \neq 0 \Rightarrow \exists\, S^{-1}$)

se $[T]^{B}_{B} = A$ e $[T]^{\tilde{B}}_{\tilde{B}} = B$ $\Rightarrow$ il legame tra le matrici è $B = S^{-1} A S$

Nell'insieme delle matrici $n \times n$, reali, $M_{n\times n}$, posso dare la seguente relazione: due matrici A e $B \in M_{n\times n}$ sono in relazione tra loro se $\exists\, S \in M_{n\times n}$ invertibile, tale che $B = S^{-1} A S$ $\Rightarrow$ $A \sim_S B$

Tale relazione è di equivalenza: INFATTI

- RIFLESSIVITÁ: $A \sim_S A$ (deve essere simile a se stesso) $\Rightarrow$ infatti $\exists\, S$ tale che $A = S^{-1} A S$? Sí, $S = I$
- SIMMETRIA: se A è in relazione con $B \Rightarrow B$ è in relazione con A

  $A \sim_S B \Rightarrow B \sim_S A$

Ipotesi $A \sim_S B \Rightarrow \exists\, S$ tale che $B = S^{-1} A S$ $\Rightarrow$ tesi: $\exists\, C$ invertibile tale che $A = C^{-1} B C$

$\Downarrow$

$S B S^{-1} = A$ $\Rightarrow$ la matrice C cercata è S^{-1}

- TRANSITIVITÁ: se $A \sim_S B$ e $B \sim_S C \Rightarrow A \sim_S C$

  $\Downarrow \qquad \Downarrow$

  $B = S^{-1} A S \qquad C = T^{-1} B T$ $\Rightarrow$ cerco una matrice invertibile M

tale che $C = M^{-1} A M$ (se sostituisco B) $C = T^{-1} S^{-1} A S T \Rightarrow M = ST$.

la relazione data è di equivalenza: essa è detta relazione di SIMILITUDINE tra matrici in $M_{n\times n}$, quindi se $A \sim_S B \Rightarrow A$ e B sono simili

Proposizione: Se $A, B \in M_{n \times m}$ e $rg A = K$ e $rg B = M$ $\Rightarrow$ $rg AB = K$

POSSIAMO Dimostrare che (AB) ridotta a gradini in forma canonica è equivalente al prodotto delle matrici A e B ridotte a gradini in forma canonica ?

Se $A \in M_{n \times n}$ ha rg max e $B \sim_S A$ $\Rightarrow$ B ha rg max infatti

POICHÉ $A = S^{-1} B S \Rightarrow |A| = |S^{-1} B S| = |S^{-1}| \cdot |B| \cdot |S| = |S|^{-1} |B| \, |S| = \underbrace{|S|^{-1} |S|}_{1} \, |B| = |B|$

quindi OSSERVAZIONE: matrici simili hanno lo stesso determinante

OSSERVAZIONE: matrici associate allo stesso operatore in basi diverse sono SIMILI. INFATTI POSSIAMO PENSARE LE MATRICI ASSOCIATE ALLO STESSO OPERATORE $T: V \longrightarrow V$ IN BASI DIVERSE $\mathcal{B}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$

Se $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ ha $rg A = k$ $\Rightarrow$ se $B = [T]_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\tilde{\mathcal{B}}}$ avremo che $rg B = rg A$ perché

$rg A = \dim \operatorname{Im} T$ CHE NON DIPENDE DALLA BASE SCELTA.

OSSERVAZIONE: un operatore corrisponde ad una classe di equivalenza di matrici simili.

ESERCIZIO

(esempio) data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ trovare B simile ad A

considero $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (x+2y, 3x+4y)$ con la base $\mathcal{E}$ nel dominio e nel codominio

$\Rightarrow T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+4y \end{pmatrix}$

cambio base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e considero

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \arrow[r, "T", "B"'] \arrow[d, "id_1"'] & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \\ (\mathbb{R}^2, \mathcal{E}) \arrow[r, "T", "A"'] & (\mathbb{R}^2, \mathcal{E}) \arrow[u, "id_2"'] \end{tikzcd}$$

$B = ?$

$B = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [id_2 \circ T \circ id_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [id_2]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \, [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} [id_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$$

$$= \left(\quad \right) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

l'inversa

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$[id_2]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$