14/10/15

TRASPOSTA DI UNA MATRICE

Def.: data $A \in M_{p\times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ diciamo TRASPOSTA di A, A^T (oppure ${}^TA$, A^t, ${}^tA$) la matrice (b_{ij}) tale che $(b_{ij}) \in M_{n\times p}$ e posto $A=(a_{ij}) \Rightarrow b_{ij}=a_{ji}$ $\forall\, i=1,\dots,p$ e $\forall\, j=1,\dots,n$

Esempio:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}_{2\times3} \Longrightarrow A^T=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}_{3\times2}$$

<u>Proposizione</u>: $A \in M_{n\times n}$ è simmetrica $\Longleftrightarrow A=A^T$

Proprietà: 1) $(A^T)^T=A$; 2) Date A e $B \in M_{p\times n} \Rightarrow (A+B)^T=A^T+B^T$;

3) Dato $k\in\mathbb{R}$ e $A\in M_{p\times n} \Longrightarrow (kA)^T=k\cdot A^T$;

4) Sia $A\in M_{p\times n}$, $B\in M_{n\times q} \Rightarrow A\cdot B\in M_{p\times q} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $\underline{(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T}$; VERIFICHIAMO INNANZITUTTO GLI ORDINI DELLE MATRICI: $(A\cdot B)^T\in M_{q\times p}$, $B^T\in M_{q\times n}$, $A^T\in M_{n\times p}$,

$B^T\cdot A^T \in M_{q\times p}$ (La Dimostrazione dell'uguaglianza tra matrici è lasciata alla volontà dello stud.)

5) Prova $A \in M_{n \times n} \Rightarrow |A^T| = |A|$

Proposizione: Sia $A \in M_{p \times n}$ ed indico con "e" un'operazione elementare in modo che $e(A)$ sia una matrice equivalente ad A.

$\Rightarrow$ data $I \in M_{p \times p}$ t.che $I \cdot A = A$, si dimostra che

$$\boxed{e(A) = e(I) \cdot A}$$

Esempio: "e" sia lo scambio di due righe

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times3} \Rightarrow e(A) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{2\times3}; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e(I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$e(I) \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

[verificare con un esempio la validità anche per le altre operazioni "e"]

Proposizione: data $A \in M_{p \times n}$, $e_1, e_2, \dots, e_n$ operazioni elementari riga $\Rightarrow$ $e_n(\dots(e_3(e_2(e_1(A))))\dots) =$

$= e_n(\dots e_3(e_2(e_1(I)))\dots) \cdot A$ con $I \in M_{p \times p}$

Dimostrazione: $e_n(\dots e_2(e_1(A)) = e_n(\dots e_2(e_1(I) \cdot A)\dots) =$

$= e_n(\dots e_3(e_2(I) e_1(I) \cdot A)\dots) = e_n(\dots e_4(e_3(I) \cdot e_2(I) e_1(I) \cdot A)\dots) =$

$= e_n(I) e_{n-1}(I) \dots e_2(I) e_1(I) \cdot A = e_n(e_{n-1}(e_{n-2} \dots (e_2(e_1(I)))\dots) \cdot A$

c.v.d.

Nel prodotto matriciale non sempre esiste la matrice inversa di una matrice data; per definizione A^{-1} è inversa di $A \Leftrightarrow A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Osservazioni:

1) A deve essere quadrata affinché $\exists A^{-1}$

2) Se $A \in M_{1\times1} \Rightarrow A$ è invertibile $\Leftrightarrow A \neq 0$

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \exists A^{-1}$ mentre se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \nexists A^{-1}$;

rango $A_1 = 2$ mentre rango $A_2 = 1$: TALE ESEMPIO CI SUGGERISCE LA SEGUENTE.

Proposizione: Sia $A \in M_{n\times n} \Rightarrow A$ è invertibile $\Leftrightarrow$ rango $A = n$
c.v.d

Proposizione: Sia $A \in M_{n\times n} \Rightarrow A$ è invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
c.v.d

Proprietà 1: Cerco $|A^{-1}|$:

sfrutto il seguente $\boxed{\text{teorema di BINÉT}}$ sul determinante di un prodotto di due matrici $A, B \in M_{n\times n}$:

$|AB| = |A| \cdot |B| \longrightarrow$ DA RICORDARE BENE

Tornando alla ricerca della proprietà 1), so che se $\exists A^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow A \cdot A^{-1} = I$, e anche $A^{-1} \cdot A = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I| \Rightarrow$
PER IL TEOREMA DI BINÉT
$\Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$ poiché lavoriamo in $\mathbb{R}$;
inoltre $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$

Proprietà 2): Se $\exists A^{-1} \Rightarrow$ è unica

*Dimostrazione per assurdo:
Ipotesi $\xRightarrow{\text{IMPLICANO}}$ TESI
Tesi negata $\Rightarrow$ Ipotesi negata
ASSURDO

Dimostrazione (per assurdo):
suppongo che $\exists\, B, C \in M_{n \times n}$ tali che $B \neq C$ e
$\underline{A \cdot B = B \cdot A = I}$ e $\underline{A \cdot C = C \cdot A = I}$

$$A \cdot B = I \Rightarrow C(A \cdot B) = C \cdot I$$
$$C \cdot A \cdot B = C$$
$$(C \cdot A) \cdot B = C \Rightarrow I \cdot B = C \Rightarrow B = C$$

Proprietà 3): Date A e $B \in M_{n \times n} \Rightarrow$ se $\exists A^{-1}$ e $B^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists (A \cdot B)^{-1}$ poiché $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$ e $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \Rightarrow |AB| \neq 0$

Proprietà 4): $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Dimostrazione: supponiamo che $\exists$ le inverse $\Rightarrow (AB)(AB)^{-1} = I$
$\Rightarrow A \cdot B \cdot (AB)^{-1} = I \xRightarrow{\text{MOLTIPLICHIAMO A SINISTRA PER } A^{-1}} A^{-1} \cdot A\, B\, (AB)^{-1} = A^{-1} \cdot I \Rightarrow$

$\Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot B \cdot (AB)^{-1} = A^{-1} \cdot I \Rightarrow I \cdot B\, (AB)^{-1} = A^{-1}$

$$B\,(AB)^{-1} = A^{-1} \Rightarrow$$

MOLTIPLICO A SINISTRA PER $B^{-1} \Rightarrow (B^{-1} \cdot B)(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \Rightarrow$

$I \cdot (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

c.v.d

Considerazione: Se $A \in M_{n \times n}$ è invertibile $\Rightarrow$ trovo la matrice equivalente $e_n(e_{n-1} \cdots (\ldots (e_2(e_1(A))$

$= I$ PERCHÈ A HA RANGO MASSIMO, $n \Rightarrow e_n(\ldots e_1(A)) = e_n(e_{n-1} \ldots (e_2(e_1(I))\ldots) \cdot A$

$$e_n(\ldots e_1(A)) = I$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ PER DEFINIZIONE DI MATRICE INVERSA $\Rightarrow \boxed{e_n(\ldots e_1(I)\ldots) = A^{-1}}$

METODI PER DETERMINARE LA MATRICE INVERSA:

1) METODO OPERATIVO: TRAMITE LE OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA

$$(A \vdots I)_{n \times 2n} \sim (I \vdots A^{-1})$$

2) METODO DI CRAMER: Formata la matrice aggiunta $A^* =$

$$= \left((-1)^{i+j} |A_{\hat{ij}}|\right) \Rightarrow A^{-1} = \frac{(A^*)}{|A|}$$