14 MARZO 2016

Una forma bilineare <u>non</u> sempre è applicazione lineare!

controesempio:

$$\varphi((v_1, w_1)+(v_2, w_2)) = \varphi((v_1, w_1)) + \varphi((v_2, w_2))$$

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1+\tilde{x}_1 \\ x_2+\tilde{x}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1+\tilde{y}_1 \\ y_2+\tilde{y}_2 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

$$(x_1+\tilde{x}_1)(y_1+\tilde{y}_1) + (x_2+\tilde{x}_2)(y_2+\tilde{y}_2) =$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \tilde{x}_1 \tilde{y}_1 + \tilde{x}_2 \tilde{y}_2$$

l'uguaglianza non è vera.

Data la forma bilineare $F: V \times V \longrightarrow k$

sia una base $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$$

$$F((v,w)) = F\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{i=1}^{n} y_i v_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i F\left(\left(v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{J=1}^{n} y_i \, F((v_i, v_J))\right) = \sum_{i,J=1}^{n} x_i y_i \, F((v_i, v_J))$$

abbiamo ottenuto un polinomio OMOGENEO di grado 2 nelle coord. dei vettori scelti.

Nell'esempio di prima $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto \underline{x_1 y_1 + x_2 y_2}$$

se abbiamo un polinomio di 2° grado ci troviamo probabilmente di fronte a una forma bilineare (anche se si devono verificare delle proprietà).

Data la base di V, $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ determino una matrice quadrata $n \times n$ in questo modo:

pongo $a_{ij} = F((v_i, v_j)) \ \forall i,j = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} F((v_1,v_1)) & F((v_1,v_2)) \dots & F((v_1,v_n)) \\ F((v_2,v_1)) & \dots & F((v_2,v_n)) \\ \vdots & & \vdots \\ F((v_n,v_1)) & \dots & F((v_n,v_n)) \end{pmatrix} = A$$

Esempio:

per F precedentemente data con la base canonica in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} F((e_1,e_1)) & F((e_1,e_2)) \\ F((e_2,e_1)) & F((e_2,e_2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{matrice identità}$$

moltiplicando il vettore $(x_1, \dots, x_n)$ delle coordinate per la matrice A, a sua volta moltiplicato per $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ottengo

$$x^T A y = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j F((v_i, v_j))$$

$(1 \times n)(n \times n)(n \times 1) = 1 \times 1$

Nell'esempio precedente:

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1, y_1)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

(Questa forma bilineare DELL'ESEMPIO è il prodotto scalare standard SU $\mathbb{R}^2$)

---

la matrice associata a una forma bilineare cambia a seconda della base fissata.

Tutte queste matrici sono collegate tra loro.

Se passo da una base B ad una base B' in V, abbiamo un cambiamento di coordinate

$$id\,(V,B) \longrightarrow (V, B')$$

$$[id]_B^{B'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \rightarrow \text{nuove coordinate}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = [id]_B^{B'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow [v]_{B'} = [id]_B^{B'} [v]_B$$

$$x^T A y = [v]_B^T \cdot \underbrace{[F]_B^B}_{\downarrow} \cdot [w]_B$$

ha per entrate
le immagini delle
coppie dei vettori
di base

$$[v]_{B'} [F]_{B'}^{B'} [w]_{B'} = \left([id]_B^{B'} [v]_B\right)^T [F]_{B'}^{B'} \left([id]_B^{B'} [w]_B\right) =$$

$$= [v]_B^T \left([id]_B^{B'}\right)^T [F]_{B'}^{B'} [id]_B^{B'} [w]_B = [v]_B^T [F]_B^B [w]_B$$

posta $[id]_B^{B'} = S$

poiche' l'uguaglianza deve valere $\forall v, w \in V \Rightarrow$ dobbiamo avere $\boxed{S^T [F]_{B'}^{B'} S = [F]_B^B}$

Due matrici quadrate A, B che soddisfano tale relazione, cioe' tali che $\exists$ $S \in \mathcal{M}_{n \times n}$ invertibile con $B = S^T A S$, si dicono congruenti.

osservazione: matrici associate alla stessa forma bilineare, in basi diverse, sono congruenti. (E' STATO DIMOSTRATO PRECEDENTEMENTE)

proposizione: la relazione di congruenza tra matrici e' di equivalenza (cioe' riflessiva, simmetrica e transitiva).

Da dimostrare.

Indichiamo tale relazione con il simbolo "$\sim_c$" cioe' scriviamo $A \sim_c B$.

Ogni forma bilineare corrisponde ad una classe di congruenza.

Considero due matrici A e $B \in M_{n\times n}$ tali che $A \sim_c B$. So che esiste una matrice S invertibile tale che $B = S^T A S$. ANALIZZIAMO I DETERMINANTI DI MATRICI CONGRUENTI:

$$|B| = |S^T A S| \rightarrow |B| = |S^T|\cdot|A|\cdot|S| \xrightarrow{\text{POICHE}} |S^T| = |S|$$

$|B| = |S|\cdot|A|\cdot|S| = |S^2|\cdot|A|$ non sono uguali ma hanno lo stesso segno.(*)

IN GENERALE:

I determinanti di matrici congruenti differiscono per un quadrato.

(*) Se il campo K coincide con $\mathbb{R}$ hanno lo stesso segno.

—·—

proposizione: il rango di una matrice e' invariante per congruenza.

Dimostrazione:

siano $A, B \in M_{n\times n}$ congruenti $\Rightarrow B = S^T A S$

$rg\, B = rg(S^T A S) = rg((S^T A)\cdot S) = rg(S^T A) = rg\, A$.

↳ PER LA PROPOSIZIONE DIMOSTRATA PER MATRICI SIMILI

Definizione: si definisce rango di una forma bilineare il rango di una ~~///////~~ matrice associata ad F in una base qualunque.

Data una matrice $A \in M_{n\times n}^{(\mathbb{R})}$, posso associare ad A una forma bilineare $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dopo aver fissato in $\mathbb{R}^n$ la base canonica, in questo modo:

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow F((x,y)) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_2y_n + \ldots + a_{1n}x_1y_n \ldots$$

$$\ldots a_{n1}x_ny_1 + \ldots + a_{nn}x_ny_n.$$

Esempio:

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{matrix} y_1 & y_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ (fissata } \mathcal{E} \text{ in } \mathbb{R}^2)$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2$$

Definizione: una forma bilineare $F: V \times V \to K$ e' detta

1. simmetrica se $F((v,w)) = F((w,v))\ \forall v,w \in V$.

2. antisimmetrica se $F((v,w)) = -F((w,v))\ \forall v,w \in V$.

3. alternante se $F((v,v)) = 0\ \forall v \in V$

Nel campo dei numeri reali ogni forma antisimmetrica e' alternante (e viceversa).

OSSERVAZIONE
Ogni matrice associata ad una forma bilineare simmetrica e' simmetrica.