Dato un sottospazio $U < V$ V sp. ~~vett.~~ euclideo $\Rightarrow \exists\ U^{\perp}$ complemento ortogonale di U tale che $V = U \oplus U^{\perp}$.

Ogni vettore $v \in V$ si può scrivere come somma $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in U^{\perp}$
il vettore u è detto PROIEZIONE ORTOGONALE di v in U e w è la proiez. ortogonale di v su $U^{\perp}$.

(metodo operativo): cerchiamo la proiez. ortog. di un vettore v su un sottospazio U di V, con $\dim V = m$:

- fissiamo una base B di V $\Rightarrow$ cerco $v = u + w$ cioè cerco $u \in U$ e $w \in U^{\perp}$
- so che $V = U \oplus U^{\perp}$: la base B sarà formata dall'unione di una base $B_u = \{u_1, \dots, u_k\}$ di U e una base $B_{U^{\perp}} = \{w_1, \dots, w_{m-k}\}$
- ~~[illegible]~~

cerco $u \in U \Rightarrow u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \Rightarrow$ essendo $v = u + w \Rightarrow w = v - u \Rightarrow w = v - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i$

poiché $w \in U^{\perp} \Rightarrow w \cdot u_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k \Rightarrow$ considero $w = v - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$ e moltiplico entrambi scalarmente per u_j $\forall j = 1, \dots, k \Rightarrow$

$$\begin{cases} w \cdot u_1 = \left(v - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i\right) \cdot u_1 \\ w \cdot u_2 = \\ \vdots \\ w \cdot u_k = \left(v - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i\right) \cdot u_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = v \cdot u_1 - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (u_i \cdot u_1) \\ \vdots \\ 0 = v \cdot u_k - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (u_i \cdot u_k) \end{cases} \Rightarrow$$

$$* \begin{cases} \alpha_1\, u_1 \cdot u_1 + \alpha_2\, u_2 \cdot u_1 + \dots + \alpha_k\, u_k \cdot u_1 = v \cdot u_1 \\ \vdots \\ \alpha_1\, u_1 \cdot u_k + \dots + \alpha_k\, u_k \cdot u_k = v \cdot u_k \end{cases}$$

sistema lineare non omogeneo nelle incognite α_j

considero ~~[illegible]~~ la matrice incompleta associata e devo dimostrare che ESSA HA lo stesso rango, ~~[illegible]~~ DELLA MATRICE COMPLETA, PER AVERE UNA SOLUZIONE DEL SISTEMA.

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & u_2 \cdot u_1 \cdots & u_k \cdot u_1 \\ \vdots & & \\ u_1 \cdot u_k & \cdots & u_k \cdot u_k \end{pmatrix}$$

IL DETERMINANTE DI TALE MATRICE È MAGGIORE DI ZERO PERCHÈ TUTTI I MINORI DI NORD OVEST SONO MAGGIORI DI ZERO PER IL TEOREMA DI JACOBI, ESSENDO A LA MATRICE DEL PRODOTTO SCALARE RISTRETTO AL SOTTOSPAZIO U, ED IL PRODOTTO SCALARE È UNA FORMA BILINEARE DEFINITA POSITIVA.
POSSIAMO COSÌ DETERMINARE LA SOLUZIONE DEL SISTEMA E QUINDI LE COORDINATE DEL VETTORE PROIEZIONE DI V SUL SOTTOSPAZIO U.

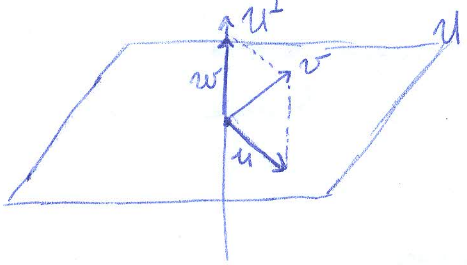
13/04/2016

esempio

Considero $v = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ e $U = \langle\langle \underset{u_1}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}} \rangle\rangle$ cioè $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = t+s \\ y = t+2s \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = x-z \\ y = z+2x-2z \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\boxed{2x-z-y=0}}_{=U}$$; il vettore $v \notin U \Rightarrow$

cerco la proiezione ortogonale di v su U



$$\begin{cases} \alpha_1 u_1\cdot u_1 + \alpha_2 u_2\cdot u_2 = v\cdot u_1 \\ \alpha_1 u_1\cdot u_2 + \alpha_2 u_2\cdot u_2 = v\cdot u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + 5\alpha_2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ 3\alpha_1 + 5\alpha_2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 2 - \alpha_2 \\ 6 - 3\alpha_2 + 5\alpha_2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{5}{2} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$ (sono le coordinate di u in U)

$u = +\frac{5}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 = +\frac{5}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3/2\\+5/2\end{pmatrix}$: u in $\mathbb{R}^3$ ha queste coordinate

$\Rightarrow w = v - u = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3/2\\5/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\+1/2\\1/2\end{pmatrix}$ (~~[illegible]~~ = PROIEZIONE DI v SU $U^\perp$)

$U^\perp = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} v\cdot u_1 = 0 \\ v\cdot u_2 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$

(v vettore generico)

Caso particolare: se in U prendiamo una base ortogonale $\Rightarrow$ il sistema *

diventa $$\begin{cases} \alpha_1 u_1\cdot u_1 = v\cdot u_1 \\ \alpha_2 u_2\cdot u_2 = v\cdot u_2 \\ \vdots \\ \alpha_k u_k\cdot u_k = v\cdot u_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{v\cdot u_1}{\|u_1\|^2} \\ \alpha_2 = \dfrac{v\cdot u_2}{\|u_2\|^2} \\ \vdots \\ \alpha_k = \dfrac{v\cdot u_k}{\|u_k\|^2} \end{cases}$$

Gli α_j sono i COEFFICIENTI di FOURIER di u

(N.B. caso particolare con base ortogonale)

---

suppongo di avere una base e di dover trovare la base ortogonale

TEOREMA DI ORTOGONALIZZAZIONE (di GRAM-SCHMIDT)

In uno spazio vettoriale (di dim = n) sono dati k vettori $v_1, \dots, v_k$, lin. ind. $\Rightarrow$ posso costruire k vettori $w_1, \dots, w_k$ ortogonali tali che $\langle\langle v_1, \dots, v_r \rangle\rangle = \langle\langle w_1, \dots, w_r \rangle\rangle \; \forall r = 1, \dots, k$

Inoltre questi vettori sono unici a meno di un fattore cioè se $\exists\, z_1, \dots, z_k \in V$ tali che $z_1, \dots, z_k$ soddisfano la precedente condizione $\Rightarrow z_j = \lambda_j w_j \; \forall j = 1, \dots, k$

Dim: pongo $w_1 = v_1$ e considero $v_2 = \alpha_1 w_1 + w_2$ con $w_2 \in \langle\langle w_1 \rangle\rangle^{\perp}$ (il complemento ortogonale di w_1)

$\Rightarrow w_2 = v_2 - \alpha_1 w_1$; è vera l'uguaglianza $\langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle = \langle\langle w_1, w_2 \rangle\rangle$?

perché si verifichi ciò è necessario che uno SIA CONTENUTO nell'altro o viceversa:

- $v_1 \in \langle\langle w_1, w_2 \rangle\rangle$ ovvio e $v_2 \in \langle\langle w_1, w_2 \rangle\rangle$ per costruzione $v_2 = \alpha_1 w_1 + w_2$
- viceversa $w_2 \in \langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle$ per costruzione

risolvendo il sistema DETERMINATO DALL'EQUAZIONE : $w_2 \cdot w_1 = v_2 \cdot w_1 - \alpha_1 w_1 \cdot w_1$ TROVO α_1 E QUINDI POSSO DETERMINARE w_2.

Continuando con la costruzione di w_3 ; scompongo $v_3 = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + w_3$ ($w_3 \perp$ al sottospazio) $\Rightarrow w_3 = v_3 - \beta_1 w_1 - \beta_2 w_2$, w_3 è $\perp$ a w_1 e w_2 cioè $w_3 \in \langle\langle w_1, w_2 \rangle\rangle^{\perp}$, come prima si dimostra che $\langle\langle v_1, v_2, v_3 \rangle\rangle = \langle\langle w_1, w_2, w_3 \rangle\rangle$ e w_3 si trova risolvendo il sistema NON OMOGENEO

$$\begin{cases} \underset{0}{\underset{\parallel}{w_3 \cdot w_1}} = v_3 \cdot w_1 - \beta_1 w_1 \cdot w_1 - \beta_2 w_2 \cdot w_1 \\ \underset{0}{\underset{\parallel}{w_3 \cdot w_2}} = v_3 \cdot w_2 - \beta_1 w_1 \cdot w_2 - \beta_2 w_2 \cdot w_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = v_3 \cdot w_1 - \beta_1 w_1 \cdot w_1 \\ 0 = v_3 \cdot w_2 - \beta_2 w_2 \cdot w_2 \end{cases}$$

e si ritorna alla formula dei coefficienti di Fourier

la costruzione fatta dei vettori w_j dimostra che ogni altro vettore che si comporta come w_j è un suo multiplo.

c.v.d.

ESEMPIO: In $\mathbb{R}^2$ dò la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ se voglio ortogonalizzare questa base di $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$

PRESO $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{0}{\underset{\parallel}{w_2 \cdot w_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$0 = 3 - 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$ $\quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}$ è ortogonale

e se voglio una base B ortonormale cerco la norma di $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ cioè $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$ e $\left\| \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow B_{1_n} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \right\}$.