12/10/15

PROPRIETÀ del DETERMINANTE

<u>osservazione</u>: matrici equivalenti hanno lo stesso rango (o equivalentemente le operazioni elementari riga non cambiano il rango delle matrici)

Il massimo numero di pivot possibile per una matrice (e quindi il suo rango massimo) è uguale al numero delle righe della matrice stessa. O AL NUMERO DI COLONNE : AL MINORE FRA I DUE NUMERI

Consideriamo matrici equivalenti, in $M_{n \times n}$, ottenute tramite una singola operazione elementare riga

1) scambio di due righe consecutive

Sia
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(-1)^{i+j}}_{\text{cambiano solo questi}} a_{ij} |A_{\hat{ij}}|.$$

Ora considero

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow |A_1| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j+1} a_{ij} |A_{\widehat{i+1,j}}|$$

$$\Rightarrow |A_1| = -|A|$$

1') Se le righe non sono consecutive $\Rightarrow$ il determinante ancora una volta differisce per il segno.

2) moltiplicazione di una riga per uno scalare

Sia
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{\hat{ij}}|$$

Sia $k \in \mathbb{R}$ e considero

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ ka_{i1} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow |A_1| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} k a_{ij} |A_{\hat{ij}}| = k \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{\hat{ij}}|$$

$$\Rightarrow |A_1| = k|A|$$

Poiché nel calcolo del determinante si può scegliere qualsiasi riga, esso non deve cambiare a seconda della riga scelta. Nel caso sopra riportato bisogna perciò ricordarsi di raccogliere k (analogamente bisogna agire in casi simili)

(Data $A \in M_{n\times n}$, considero $|A|$ e $kA \Rightarrow \underline{|kA| = k^n |A|}$
Ognuna delle n sottomatrici considerate nel calcolo del determinante è ~~infatti~~ moltiplicata per k, raccogliendo k per ogni sottomatrice troviamo k^n)

3) Sostituzione di una riga con la somma di quella riga con un'altra riga della matrice

<u>Lemma</u>: (proposizione che serve per dimostrare un'altra proposizione o teorema)
Se in una matrice quadrata A due righe hanno le stesse entrate $\Rightarrow |A| = 0$

Es:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 2-2 = 0$ in generale $\boxed{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = (-1)^{2+1}(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\, 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

Poiché anche con matrici di più righe e colonne ci si riconduce al determinante di sottomatrici 2x2, che abbiamo visto essere 0, allora anche il determinante di tali matrici risulta 0. **INFATTI**:

<u>Dimostrazione per INDUZIONE</u> del lemma sull'ordine n della matrice quadrata A

<u>**I passo**</u>) Verifico il lemma per il più piccolo n possibile: in questo caso è $n=2$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12}$

<u>**II passo**</u>) Supponiamo vero il lemma per valori DI n fino a k e dimostriamolo per $n = k+1$

Sia $A \in M_{(k+1)\times(k+1)} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,k+1} \\ a_{j1} & \cdots & a_{j,k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{m+l} a_{ml} |A_{\widehat{ml}}|$ supponendo $m \neq i, j$

i-esima riga

$|A_{\widehat{ml}}| \rightarrow$ matrice $k \times k$

Le matrici $A_{\widehat{ml}} \in M_{k\times k}$ con due righe uguali $\Rightarrow$ per ipotesi induttiva $|A_{\widehat{ml}}| = 0 \;\forall l = 1, \dots, k+1$

c.v.d.

<u>Proposizione</u>:
Date due matrici $A, B \in M_{n\times n} \Rightarrow A+B \in M_{n\times n}$
Vogliamo dimostrare che $|A+B| \neq |A| + |B|$
<u>Dimostrazione</u>: cerchiamo un controesempio

Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A+B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$|A| = -2 \quad |B| = -2 \quad |A+B| = -10$

$|A| + |B| = -4$

$\neq$

<u>Proposizione</u>:
Siano A e $B \in M_{n\times n}$ tali che $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Considero $C = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow |C| = |A| + |B|$

i-esima riga

$\rightarrow$ Dimostrazione (esercizio)

 12/10/15

3) Sostituzione di una riga con la somma di quella riga con un'altra riga di A

$$\text{Sia } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1}+a_{j1} & \dots & a_{in}+a_{jn} \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A_1 \leftarrow \text{i-esima riga}$$

~~Quindi~~ PER LA PROPOSIZIONE PRECEDENTE IL DETERMINANTE DI A_1

È: $$|A_1| = \begin{array}{c} \\ i \rightarrow \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{=A} + \begin{array}{c} \\ i \rightarrow \\ j \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| + 0 = |A|$$

MATRICE CON DUE RIGHE UGUALI

Questa operazione elementare non cambia il determinante. È perciò detta DETERMINANTALE. E SI PUÒ SFRUTTARE PER OTTENERE MATRICI CON "ZERI" EQUIVALENTI A QUELLA DATA E CALCOLARE PIÙ FACILMENTE IL DETERMINANTE

Proposizione:

Se una matrice $A \in M_{n\times n}$ è triangolare superiore o diagonale $\Rightarrow |A|$ si ottiene moltiplicando fra loro le entrate della diagonale principale

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Da dimostrare. IN GENERALE.