Sia L $V \to W$ (applicazione lineare) (Esempio $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y) \to (x',y',z')$ date come combinazione di x,y $= (2x-y,\ 3x+y,\ -x+y)$)

possiamo fissare le basi $B_V = \{v_1, \dots v_n\}$ e $B_W = \{w_1, \dots w_p\}$

Dopo aver fissato le basi posso ~~applicare~~ associare una matrice all'applicazione lineare

matrice $[L]_{B_V}^{B_W} \in M_{p \times n}$ così definita:

$$[L]_{B_V}^{B_W} = \begin{pmatrix} [L(v_1)]_{B_W} & [L(v_2)]_{B_W} & \dots & [L(v_n)]_{B_W} \\ | & | & \dots\dots & | \\ | & | & & | \end{pmatrix}_{p \times n}$$

(coordinate dell'immagine del dominio nella base del codominio)

OSSERVAZIONE: $rg[L]_{B_V}^{B_W} = \dim Im L$ e $\dim Ker L = \dim V - rg[L]_{B_V}^{B_W}$

($\to$ la matrice mi dà tutto il necessario per capire l'applicazione)

- Nell'esempio dato: L è iniettiva?

Fisso le basi canoniche in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$ $\to [L]_{e_{\mathbb{R}^2}}^{e_{\mathbb{R}^3}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$ * : INFATTI :

$\to$ cerco $L(e_1) = L\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ (immagine tramite L di $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$)

$L(e_2) = L\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

Il rango della matrice è 2 (* il det del minore è 5). $\Rightarrow$ PER IL TEOREMA DELLE DIMENSIONI: $\dim Ker L = \dim V - \dim Im L \Rightarrow \dim Ker L = 2 - 2 = 0$

$\Rightarrow L$ È INIETTIVA..

OSSERVAZIONE: SE LE BASI SONO CANONICHE, LA MATRICE ASSOCIATA HA PER RIGHE I COEFFICIENTI DEI POLINOMI CHE DEFINISCONO LE COMPONENTI DI L

Se $id: L$ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è l'identità $\to$ quale sarà la matrice applicata all'identità?
$(x,y,z) \to (x,y,z)$

$\to$ la matrice associata sarà $I_{3\times3}$ solo se abbiamo la stessa base nel dominio e nel codominio

Prendo la base $B_{\mathbb{R}^3} = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow id\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $id\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}^*$ $id\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}^{**}$

$\hookrightarrow = 1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}$

* $0\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

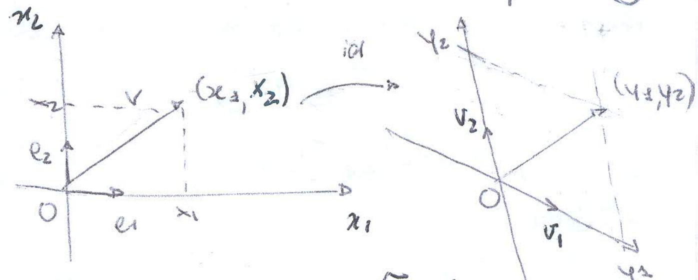
** $0\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow [id]^{B\mathbb{R}^3}_{B\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

- Possiamo vedere il cambiamento di base come un'applicazione.

Considero uno spazio V con base B_V (V, B_V) $\Rightarrow v \in V$ è dato da: posto $B_V = \{v_1 \dots v_n\}$

$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ e $[v]_{B_V} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$



$B_V = \{e_1, e_2\}$ $\tilde{B} = \{v_1, v_2\}$

$\rightarrow$ quando cambio base il vettore rimane "fermo": cambia il sist. di riferimento

il cambiamento di base è un' identità

$id (V, B_V) \longrightarrow (V, \tilde{B_V})$

$v \longmapsto v$

$$(V, B_V) \xrightarrow{id} (V, \tilde{B_V}) \xrightarrow{L} (W, B_W)$$: Abbiamo cambiato la base nel dominio!

$L \circ id$ $\rightarrow$ a partire da due applicazioni lineari la funzione composta, è ancora lineare?

PROPOSIZIONE: la composizione di due applicazioni lineari, quando possibile, è lineare.

DIM. siano $L_1 \; V \rightarrow W$ e $L_2 : W \rightarrow U$ lineari $\rightarrow L_2 \circ L_1 ; V \rightarrow U$, è lineare? $(L_2 \circ L_1)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 (L_2 \circ L_1)(v_1) + \alpha_2 (L_2 \circ L_1)(v_2)$

$\rightarrow$ sfrutto la linearità di L_1.

$(L_2 \circ L_1)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = L_2 (L_1 (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)) = L_2 (\alpha_1 L_1(v_1) + \alpha_2 L_1(v_2)) =$

$= \alpha_1 L_2 (L_1(v_1)) + \alpha_2 L_2 (L_1(v_2)) = \alpha_1 (L_2 \circ L_1)(v_1) + \alpha_2 (L_2 \circ L_1)(v_2)$

DATE : $L_1 : V \longrightarrow W$; $L_2 : W \longrightarrow U$ e $L_2 \circ L_1 : V \longrightarrow U$ LINEARI c.v.d.

$\Rightarrow$ Se fisso $B_V = \{v_1 \dots v_n\}$, $B_W = \{w_1 \dots w_p\}$ e $B_U = \{u_1 \dots u_q\}$ che legame c'è (se c'è) tra $[L_2 \circ L_1]^{B_U}_{B_V}$ e $[L_1]^{B_W}_{B_V}$ e $[L_2]^{B_U}_{B_W}$?

$[L_2 \circ L_1]^{B_U}_{B_V} [v]_{B_V} = [(L_2 \circ L_1)(v)]_{B_U} =$

$= [L_2(L_1(v))] = [L_2]^{B_U}_{B_W} \cdot [L_1(v)]_{B_W} = [L_2]^{B_U}_{B_W} \cdot [v]_{B_V}$

$\Rightarrow [L_2 \circ L_1]^{B_U}_{B_V} [v]_{B_V} = [L_2]^{B_U}_{B_W} [L_1]^{B_W}_{B_V} \cdot [v]_{B_V}$ $\Rightarrow$ poiché v è generico $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{[L_2 \circ L_1]^{B_U}_{B_V}}_{M_{q \times n}} = \underbrace{[L_2]^{B_U}_{B_W}}_{M_{q \times p}} \cdot \underbrace{[L_1]^{B_W}_{B_V}}_{M_{p \times n}}}$$

$$\begin{tikzcd}(V_1, B_V) \arrow[r, "id"] & (V, \tilde{B_V}) \arrow[r, "L"] & (W, B_W)\end{tikzcd}$$

$$v \longmapsto v \qquad v \longmapsto L(v)$$

$L \circ id = L$ (→ ho cambiato le coordinate rispetto alle basi, non l'applicazione)

→ È cambiata la matrice associata

ho: $[L]^{B_W}_{\tilde{B_V}}$ e cerco $[L]^{B_W}_{B_V}$ (→ come trovo la matrice? → sfrutto id)

$$\Rightarrow [L]^{B_W}_{B_V} = [L \circ id]^{B_W}_{B_V} = [L]^{B_W}_{\tilde{B_V}} \cdot [id]^{\tilde{B_V}}_{B_V}$$

Data la matrice $M \in M_{p \times n}$ (Esempio $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$) ⇒ posso associare a M un'applicazione:

$L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\underline{L(v) = M \cdot v}$

⇒ L è lineare? Dati v_1 e $v_2 \in \mathbb{R}^3$ ⇒ VEDIAMO PIÙ IN GENERALE: DATA $M \in M_{p \times n}$

In generale POSSIAMO DEFINIRE $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $v \to Mv$ ⇒ L è lineare? dati $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2)\ ?$$

$$M(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = M\alpha_1 v_1 + M\alpha_2 v_2 = \alpha_1 M v_1 + \alpha_2 M v_2$$ → $\underline{\text{È lineare}}$

Se fisso le basi negli spazi vettoriali $B_{\mathbb{R}^n}$, $B_{\mathbb{R}^p}$ ⇒ data M e costruita l'applicazione $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ tale che $L(v) = M \cdot v$ ⇒ $[L]^{B_{\mathbb{R}^p}}_{B_{\mathbb{R}^n}} = M$ (da dimostrare)

⇒ Se considero $M_{p \times n}$ e $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = \{L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \text{ lineare}\} = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$

(a una matrice ho applicato)

ho determinato un'applicazione $\Phi: M_{p \times n} \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ è un isomorfismo tra spazi vettoriali e fissate le basi negli spazi è un isomorfismo (dimostrare)

COSÌ DEFINITA: $\Phi(M) = L$ TALE CHE $L(v) = Mv$. INOLTRE $M \to L$

$\exists\ \Phi^{-1}$ COSÌ DEFINITA: $\Phi^{-1}(L) = [L]^{B_W}_{B_V}$ ⇒

→ applicazione invertibile e quindi BIETTIVA POICHÉ $[L]^{B_W}_{B_V} = M$.

Ho un isomorfismo una volta fissate le basi negli spazi. Se cambio le basi, cambio l'applicazione, PERCIÒ L'ISOMORFISMO È NON CANONICO.

Se a un'applicazione associo infinite matrici, ci sarà una relazione tra le varie matrici

PROBLEMA:
Data la matrice $M \in M_{p \times n}$ dare l'applicazione lineare associata ad M nelle basi $B_{\mathbb{R}^n}$ e $B_{\mathbb{R}^p}$., MEDIANTE LE COORDINATE DELLO SPAZIO

$M \cdot v = w$ → dato nelle coordinate, queste sono nelle basi canoniche)

$$\begin{tikzcd} (V, B_v) \arrow[r, "L"] \arrow[d, "id"'] & (W, B_w) \\ (V, e_v) \arrow[r, "L"] \arrow[r, phantom, "M"'] & (W, e_w) \arrow[u, "id"'] \end{tikzcd}$$

→ diagramma commutativo:
partendo da v posso arrivare a $L(v)$ anche facendo la composizione

abbiamo M che è una matrice "sbagliata" NEL SENSO CHE NON CI DÀ L'APPLICAZIONE CERCATA. ⇒ SFRUTTO IL DIAGRAMMA COMMUTATIVO E LA RELAZIONE TRA LE MATRICI
$L = id_2 \circ L \circ id_1$ → cerco le matrici associate

$[L] = [id_2][L][id_1]$ PER DETERMINARE LA MATRICE UTILE PER DARE L'APPLICAZIONE CHIESTA.
negli es.

$$\begin{tikzcd} (V, B_v) \arrow[r, dash, "M"] & (W_1 B_w) \arrow[d, "id"] \\ (V\ e_v) \arrow[u, "id"] \arrow[r, dash, "A"'] & (V, e_w) \end{tikzcd}$$

→ devo scrivere l'applicazione lineare chiesta, nelle basi di partenza, per farlo devo trovare la matrice A