EQUIVALENTI

Se $A' \sim A$, $A, A' \in M_{p\times n}$, $\Rightarrow$ lo spazio colonna di A, C_A, coincide con lo spazio colonna di A', $C_{A'}$?

↳ SPAZIO VETTORIALE GENERATO DALLE COLONNE

$\boxed{9/11/15}$

CONTRO ESEMPIO

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[5R_1-2R_4\to R_4]{\substack{R_1-2R_2\to R_2 \\ 2R_1-R_3\to R_3}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2-R_3\to R_3 \\ R_2-R_4\to R_4}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \alpha \overset{\substack{V_1 \\ \downarrow}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + \beta \overset{\substack{V_2 \\ \downarrow}}{\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \to \begin{cases} \alpha - \dfrac{\beta}{2} = 2 \\ \beta = 1 \\ 4 = 0 \\ 5 = 0 \end{cases} \to \text{IMPOSSIBILE}$$

BASTANO 2 VETTORI LINEAR. INDIPENDENTI ($rg=2$)

↳ V_1 e V_2 ← NUMERO MAX di lin. ind.

PERCHÉ c'è un MINORE non nullo di $rg=2$ in $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \det\begin{vmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

oppure

NON SONO UNO MULTIPLO DELL'ALTRO

NON FA PARTE dello SPAZIO COLONNA

NO: CONTROESEMPIO

PROPOSIZIONE

Date A e $A' \in M_{p\times n}$, $A \sim A'$ → le colonne linearmente indipendenti di A' occupano la stessa posizione delle colonne lin. indip. di A.

DIMOSTRAZIONE

Siano C_i e C_j colonne di A' lin. indip. $\Rightarrow$ voglio dimostrare che C_i' e C_j' colonne di A sono lin. indip.

$\Rightarrow$ * PONGO $\boxed{\alpha C_i' + \beta C_j' = 0}$ $\Rightarrow$ DEVO DIMOSTRARE CHE $\alpha = \beta = 0$.

Considero A' e il sistema lin. OMOGENEO Σ_0': $A'X = 0$

con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ POSSORISCRIVERE $\overbrace{x_1 C_1' + x_2 C_2' + \dots + x_m C_m' = 0}^{A'X=0 \text{ NELLA FORMA}}$

ESEMPIO

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1x_1 \\ 4x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 5x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_3 \\ 6x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

OMOGENEO

* DATO $\alpha C_i' + \beta C_j' = 0$ $\Rightarrow$ POSSO RISCRIVERE, USANDO TUTTE LE COLONNE DI A'

$$0 \cdot C_1' + 0 \cdot C_2' + \dots + \alpha C_i' + 0 \cdot C_{i+1}' + \dots + \beta \cdot C_j' + 0 \cdot C_{j+1}' + \dots + 0\, C_m' = 0$$

$\Rightarrow$ ALLORA avrò:

$$A' \cdot \begin{array}{r} \\ \\ \\ i\text{-esima entrata} \quad i \\ \\ \\ \\ j\text{-esima entrata} \quad j \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \alpha \\ \vdots \\ \beta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sol}\, \Sigma_0'$$

MA SAPPIAMO CHE $\mathrm{Sol}\, \Sigma_0' = \mathrm{Sol}\, \Sigma_0$ DOVE Σ_0 È $AX = 0$

$\Rightarrow$ So che

$$0\, C_1 + 0\, C_2 + \dots + \alpha C_1 + \dots + \beta C_j + \dots + 0\, C_m = 0$$

$\Rightarrow$ $\alpha C_i + \beta C_j = 0$ MA C_i E C_j SONO LIN. INDIPENDENTI,

QUINDI $\alpha = \beta = 0$ $\Rightarrow$ C_i' e C_j' SONO LIN. INDIPENDENTI

PROPOSIZIONE SUPPONIAMO CHE IL K-ESIMO VETTORE COLONNA DI A' SIA COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ALTRI VETTORI COLONNA

$$\text{Se } C'_k = \alpha_1 C'_1 + \dots + \alpha_{k-1} C'_{k-1} + \alpha_{k+1} C'_{k+1} + \dots + \alpha_n C'_n$$

STESSI COEFFICIENTI

$$\Rightarrow \boxed{C_k = \alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_{k-1} C_{k-1} + \alpha_{k+1} C_{k+1} + \dots + \alpha_n C_n}$$

DIMOSTRAZ.

$$\alpha_1 C'_1 + \dots + \alpha_{k-1} C'_{k-1} - C'_k + \alpha_{k+1} C' + \dots + \alpha_n C'_n = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, -1, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) \in Sol\, \Sigma'_0 \quad \text{DOVE } \Sigma'_0 : A'X = 0$$

$$\text{ma } (\alpha_1, \dots, -1, \dots, \alpha_n) \in Sol\, \Sigma_0 \quad \text{DOVE } \Sigma_0 : AX = 0 \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_{k-1} C_{k-1} - C_k + \alpha_{k+1} C_{k+1} + \dots + \alpha_n C_n = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{C_k = \alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_n C_n}$$

OK

ESEMPIO LA LIN. DIPENDENZA DI C'_2 E C'_5 SI VEDE BENE NELLA MATRICE RIDOTTA A GRADINI IN FORMA CANONICA

$$C'_2 = 3C'_1$$

$$C'_5 = C'_1 + 2C'_3 + 3C'_4$$

$$A' = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ LA STESSA DIPENDENZA LINEARE SI RITROVA FRA LE COLONNE DELLA MATRICE A EQUIVALENTE AD A': $C_2 = 3C_1$ E $C_5 = C_1 + 2C_3 + 3C_4$.

(C'_1, C'_3, C'_4: SICURAMENTE LIN. INDIP. PERCHÈ CANONICI)

$\boxed{rg = 3}$

3 PIVOTS

APPLICAZIONE

$$\begin{array}{ccccccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 \\ \hline a_{11} & \dots & & & & & \dots \\ a_{12} & \dots & & & & & \dots \\ a_{13} & \dots & & & & & \\ a_{14} & \dots & & & & & \\ a_{15} & \dots & & & & & \end{array}$$

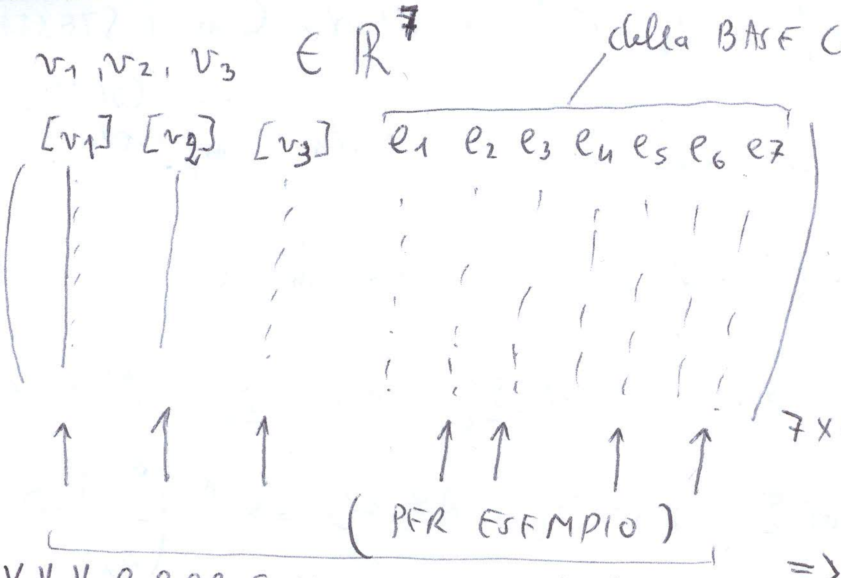
- SI RIDUCE, RANGO, PIVOTS, VETTORI lin. ind. → SONO BASI (corrisponde a quelle iniziali)

APPLICAZIONE:

DATI k VETTORI LIN. INDIPENDENTI IN UNO SPAZIO VETTORIALE V, n-DIMENSIONALE ($k<n$) COMPLETARE AD UNA BASE DI V CIOÈ DARE UNA BASE DI V CHE COMPRENDA I VETTORI DATI: SI SCRIVE UNA MATRICE CON I k VETTORI DATI, COME COLONNE, A CUI AFFIANCHIAMO I VETTORI DELLA BASE CANONICA DI V.

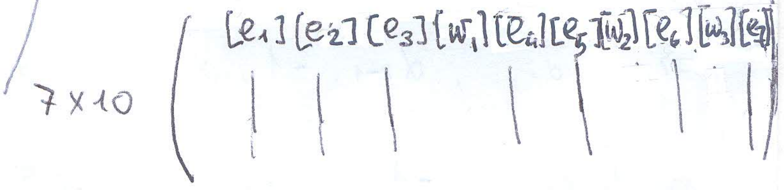
ESEMPIO

$v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^7$



SI RIDUCE a GRADINI,

$\boxed{rg A = 7}$ => LA SUA FORMA CANONICA PUÒ ESSERE:



=> $V_1, V_2, V_3, e_2, e_3, e_5, e_7$ SONO LIN. INDIP. => sono BASE di $\mathbb{R}^7$ CHE CONTIENE I VETTORI DATI

EJERCIZIO

$$\begin{pmatrix} \overbrace{1 & -2 & 1}^{*} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\text{1ª e 2ª colonna}}$ LIN. INDIP. (NON MULTIPLI)

$rg = 3$

$R_2 - 2R_1 \to R_2$, $R_3 - 3R_1 \to R_3$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$5R_3 - 8R_2 \to R_3$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

$2R_3 + R_2 \to R_2$
$R_1 - R_3 \to R_1$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 8 & -5 \\ 0 & 5 & 0 & -15 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

$R_1 + 2R_2 \to R_1$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

CANONICA → è BASE di $\mathbb{R}^3$ quindi anche $\overset{*}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$ è BASE di $\mathbb{R}^3$ CERCATA!

Dato V SPAZIO VETTORIALE e W_1 e W_2 suoi SOTTOSPAZI

⇒ $W_1 \cap W_2$ è SOTTOSPAZIO di V ?

$W_1 \cup W_2$ è <u>SOTTOSPAZIO</u> di V ?

↳ CHIUSO (RISPETTO ALLE OPERAZIONI DI V E CONTENENTE IL VETTORE NULLO E

1) CONSIDERO $W_1 \cap W_2 =: \{ v \in V \mid v \in W_1 \text{ e } v \in W_2 \}$

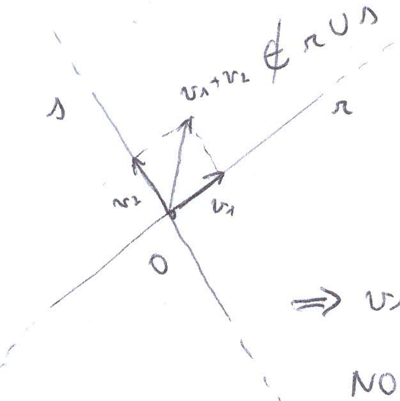
- $0 \in W_1 \cap W_2$? → SI PERCHÉ $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$
- Siano $v_1, v_2 \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in W_1 \cap W_2$?

Poiché $v_1, v_2 \in W_1 \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in W_1$

Poiché $v_1, v_2 \in W_2 \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in W_2$

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in W_1 \cap W_2$ ∴ È SOTTOSPAZIO !!

2) L'UNIONE DI SOTTOSPAZI NON È UN SOTTOSPAZIO : CONTROESEMPIO



$W_1 = r$, $W_2 = s$: RETTE NEL PIANO.

$r \cup s$

$\Rightarrow v_1 + v_2 \notin r \cup s$

NON è SOTTOSPAZIO

(r+s = PIANO)

<u>DEFINIZIONE</u>

Dati $W_1, W_2 < V$ ⇒ si chiama SOMMA dei 2 SOTTOSPAZI, $W_1 + W_2$ il + piccolo SOTTOSPAZIO di V che contiene $W_1 \cup W_2$

$W_1 + W_2 = \{ w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2 \}$