FORME LINEARI

$f: V \to \mathbb{R}$ forma lineare (hanno per codominio il campo) con V sp. vett. n-dimensionale.

L'insieme di tali forme è indicato con il simbolo $\mathrm{Hom}\{V, \mathbb{R}\}$.
Tale insieme con le operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare è uno sp. vettoriale.

- $(f_1+f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v) \quad \forall f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}), v \in V \to$ Somma
- $(\alpha f)(v) = \alpha(f(v)) \quad \alpha \in \mathbb{R} \to$ Moltipl. per scalare

Tale spazio è detto SPAZIO DUALE di V: V^* o $V^\vee$

Vogliamo sapere la sua dimensione.
Cerco una base di V^*. Diciamo $B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base di V
definisco le forme lineari

$$\varphi_1: V \to \mathbb{R} \quad v_1 \mapsto 1,\ v_2 \mapsto 0,\ \dots,\ v_n \mapsto 0$$
$$\varphi_2: V \to \mathbb{R} \quad v_1 \mapsto 0,\ v_2 \mapsto 1,\ v_3 \mapsto 0,\ \dots,\ v_n \mapsto 0$$
$$\varphi_3: V \to \mathbb{R} \quad v_1 \mapsto 0,\ v_2 \mapsto 0,\ v_3 \mapsto 1,\ v_4 \mapsto 0,\ \dots,\ v_n \mapsto 0, \dots$$
$$\dots, \varphi_n: V \to \mathbb{R} \quad v_1 \mapsto 0,\ v_2 \mapsto 0,\ \dots,\ v_n \mapsto 1$$

$$\varphi_i(v_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \implies \varphi_i(v_j) = \delta_{ij} \text{ Delta di Kronecker}$$

Dato $v \in V$, $v = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$

$$\varphi_1(v) = \varphi_1(x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n) = x_1\varphi_1(v_1) + x_2\varphi_1(v_2) + \dots + x_n\varphi_1(v_n)$$
$$= x_1 \implies \varphi_i(v) = x_i$$

Sono lin. indipendenti? Sì

Pongo $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \dots + \alpha_n\varphi_n = 0 \implies$
$$\implies \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\varphi_j\right)(v) = 0(v) = 0 \quad \forall v \in V$$
E QUINDI ANCHE $\forall v_i \in B_V$ AVREMO:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i(v_1) = 0 \implies \alpha_1\varphi_1(v_1) + \dots + \alpha_n\varphi_n(v_n) = 0 \implies \alpha_1 = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i(v_2) = 0 \implies \alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i(v_n) = 0 \implies \alpha_n = 0 \end{cases}$$

Generano lo spazio V^*?

Dato $f \in V^* \implies$ CERCHIAMO $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \mid f = \alpha_1\varphi_1 + \dots + \alpha_n\varphi_n$? SE PONIAMO

$$f = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \dots + \alpha_n\varphi_n$$

Dato $v \in V \implies$ voglio che $f(v) = (\alpha_1\varphi_1 + \dots + \alpha_n\varphi_n)(v) \quad \forall v \in V$

CONOSCIAMO l'immagine di v_1 tramite f: $y_1 = f(v_1) \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i\right)(v_1) = f(v_1)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i(v_1) = \alpha_1 \implies \alpha_1 = y_1,$$

così

$$y_2 = f(v_2) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i\right)(v_2) = \alpha_2$$

$$\vdots$$

$$y_n = f(v_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i\right)(v_n) = \alpha_n$$

$\Rightarrow f = y_1\varphi_1 + y_2\varphi_2 + \dots + y_n\varphi_n$ detto BASE DUALE

$\Rightarrow \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ è base di V^* $\Rightarrow \dim V^* = n = \dim V$

(Poiché abbiamo trovato che V^* e V hanno uguali dimensione, $\Rightarrow$ DALL'A TEORIA SAPPIAMO CHE è possibile stabilire tra essi un isomorfismo)

DIMOSTRIAMO CHE:

i due spazi vettoriali sono isomorfi tramite il morfismo

$$\Phi: V \longrightarrow V^*$$
$$v_1 \longmapsto \varphi_1$$
$$\vdots$$
$$v_n \longmapsto \varphi_n$$

$$\Phi(v) = \Phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \Phi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i$$

Perciò Φ è lineare (l'abbiamo costruito in modo che lo fosse)

Φ è iniettivo?

$\operatorname{Ker} \Phi = \{v \in V \mid \Phi(v) = 0\} = \{0\}$: $\Phi(\sum x_i v_i) = 0 \Rightarrow \sum x_i \Phi(v_i) = 0 \Rightarrow \Phi(v) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i\right) = 0$

$\Rightarrow$ SE $\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i = 0$, ESSENDO φ_i VETTORI DI BASE $\Rightarrow x_i = 0 \ \forall i \Rightarrow v$ è il solo vettore nullo

La base $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ è la BASE DUALE della base $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$

È possibile ~~stabilire~~ dare uno spazio duale anche dallo spazio duale V^* appena definito. Esso è detto SPAZIO BIDUALE (V^{**}).

Si verifica che V^{**} è isomorfo canonicamente a V, MENTRE L'ISOMORFISMO Φ DIPENDE DALLA BASE SCELTA, E QUINDI NON È CANONICO!

Es: Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi in una variabile con grado ≤ 2. Consideriamo le funzioni polinomiali associate definite nell'intervallo $[0,1]$.

$V = \{ax^2 + bx + c = f(x)$ con $x \in [0,1]\} \Rightarrow \dim V = 3$ e una sua base è $\{1, x, x^2\}$

QUINDI $\dim V = 3 \Rightarrow$ ANCHE $\dim V^* = 3$

Considero le forme lineari su V e in particolare definisco Φ_1, Φ_2, Φ_3 in questo modo: $\Phi_1(f(x)) = \int_0^1 f(x)\,dx$, $\Phi_2(f(x)) = f'(1)$, $\Phi_3(f(x)) = f(0)$

(Per come sono definite, sappiamo già che l'integrale, la derivata e la funzione calcolata in un punto sono lineari)

Trovare la base DUALE di $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$. INNANZI TUTTO DIMOSTRIAMO CHE $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$ FORMANO UNA BASE DI V^*

Dimostro che Φ_1, Φ_2, Φ_3 sono lin. indipendenti

POICHÉ $\dim V^* = 3$, SE DIMOSTRIAMO CHE SONO LIN. INDIPENDENTI SAPPIAMO CHE SONO ANCHE GENERATORI DI V^*

03/03/16

Dimostro che Φ_1, Φ_2, Φ_3 sono lin. indip.

Pongo $\alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2 + \alpha_3 \Phi_3 = 0 \Rightarrow \forall f(x) \in V \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \Phi_i \right)(f(x)) = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \Phi_i (f(x)) = 0 \Rightarrow \alpha_1 \int_0^1 f(x)\,dx + \alpha_2 f'(1) + \alpha_3 f(0) = 0$

$$0 = \alpha_1 \int_0^1 (ax^2+bx+c)\,dx + \alpha_2 (ax^2+bx+c)'(1) + \alpha_3 (ax^2+bx+c)(0)$$

$$\alpha_1 \left(a\frac{x^3}{3} + \frac{b}{2}x^2 + cx\right)\Big|_0^1 + \alpha_2 (2ax+b)(1) + \alpha_3 c = 0$$

Le nostre variabili sono gli α_i $\leftarrow$ $\alpha_1 \frac{a}{3} + \alpha_1 \frac{b}{2} + \alpha_1 c_1 + 2a\alpha_2 + b\alpha_2 + c\alpha_3 = 0$

$$\Rightarrow \alpha_1 \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c\right) + \alpha_2 (2a+b) + \alpha_3 c = 0$$

Se $b=c=0$: $\alpha_1 \frac{a}{3} + 2a\alpha_2 = 0$

Se $a=b=0$: $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$

Se $a=c=0$: $\alpha_1 \frac{b}{2} + \alpha_2 b = 0$

$$\Rightarrow \Sigma: \begin{cases} \alpha_1 + 6\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \Rightarrow$$

ho $rg = 3 \Rightarrow \dim Sol\ \Sigma = 0$ L'unica soluzione è il vettore nullo

$\Rightarrow$ Φ_1, Φ_2, Φ_3 DEFINISCONO UNA BASE DI V^*

Cerco la base duale di $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}'$ (Siamo nel biduale CHE È ISOM. A V)

$\Rightarrow$ ~~CERCO~~ CERCO: $v_1 = a_1 x^2 + b_1 x + c$, $v_2 = a_2 x^2 + b_2 x + c_1$, $v_3 = a_3 x^2 + b_3 x + c_3$ TALI CHE: Sono le imposizioni che dobbiamo fare

$$① \Rightarrow \begin{cases} \Phi_1(v_1) = \Phi_1(a_1x^2+b_1x+c_1) = 1 \\ \Phi_2(v_1) = 0 \\ \Phi_3(v_1) = 0 \end{cases} ; \quad ② \begin{cases} \Phi_1(v_2) = 0 \\ \Phi_2(v_2) = 1 \\ \Phi_3(v_3) = 0 \end{cases} ; \quad ③ \begin{cases} \Phi_1(v_3) = 0 \\ \Phi_2(v_3) = 0 \\ \Phi_3(v_3) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$①: \begin{cases} \frac{a_1}{3} + \frac{b_1}{2} + c_1 = 1 \\ 2a_1 + b_1 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{3} - a_1 = 1 \\ b_1 = -2a_1 \\ c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{3}{2} \\ b_1 = 3 \\ c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$$

ANALOGAMENTE RISOLVENDO ② e ③ OTTENIAMO $v_2 = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$, $v_3 = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$

E $\{v_1, v_2, v_3\}$ È LA BASE CERCATA.

FORME BILINEARI

DEF: Sia V uno sp. vett. n-dimensionale su un campo $K \Rightarrow$ si dice FORMA BILINEARE un'applicazione $\varphi: V \times V \to K$ tale che

- $\varphi(\underbrace{(v_1+v_2, w)}_{\text{coppia}}) = \varphi((v_1, w)) + \varphi((v_2, w)) \quad \forall v_1, v_2, w \in V$
- $\varphi((\alpha v, w)) = \alpha\, \varphi((v, w)) \quad \forall v, w \in V$ e $\alpha \in K$

linearità della prima componente

E ANALOGAMENTE SULLA SECONDA COMPONENTE:

$\cdot\ \varphi((v, w_1+w_2)) = \varphi((v,w_1)) + \varphi((v,w_2))$

$\cdot\ \varphi((v, \beta w)) = \beta\varphi((v,w)) \qquad \forall v, w, w_1, w_2 \in V \text{ e } \beta \in K$

Ci domandiamo se le forme bilineari siano lineari. Consideriamo il seguente esempio.

Es: Sia $V=\mathbb{R}^2$ $\quad \varphi: \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad$ è bilineare?

$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) \longmapsto (x_1y_1+x_2y_2)$$

DIMOSTRIAMO LA BILINEARITÀ:

$$\varphi((\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2, w)) = \varphi\left(\alpha_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\\tilde{x}_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix}\alpha_1x_1+\alpha_2\tilde{x}_1\\\alpha_1x_2+\alpha_2\tilde{x}_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) =$$

$$= (\alpha_1x_1+\alpha_2\tilde{x}_1)y_1 + (\alpha_1x_2+\alpha_2\tilde{x}_2)y_2$$

lin I^a componente $\Leftarrow$

$$\alpha_1\varphi((v_1,w)) + \alpha_2\varphi((v_2,w)) = \alpha_1\varphi\left(\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)\right) + \alpha_2\varphi\left(\left(\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\\tilde{x}_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)\right) =$$

$$= \alpha_1(x_1y_1+x_2y_2) + \alpha_2(\tilde{x}_1y_1+\tilde{x}_2y_2)$$

Analogamente si dimostra la linearità per la seconda componente.

OSSERVAZIONE

[In generale una forma bilineare non è lineare].

Vedere se $\varphi((v_1,w_1)+(v_2,w_2)) = \varphi((v_1,w_1)) + \varphi((v_2,w_2))$

PER L'ESEMPIO DATO SOPRA