DATA UN OPERAZIONE "$*$" SU UN INSIEME $\mathcal{A}$ $\Rightarrow$ (7/10/15) 1

SE "e" È ELEMENTO NEUTRO DI "$*$" in $\mathcal{A}$ $\Rightarrow$ PER DEFINIZIONE

$$\Rightarrow \quad a * e = e * a = a \qquad \forall\, a \in \mathcal{A}:$$

- CERCHIAMO L'INVERSA DI UNA MATRICE, PER L'OPERAZIONE DI PRODOTTO TRA MATRICI: $\Rightarrow$ FACCIAMO UN ESEMPIO PER UNA MATRICE 2x2:

ES: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ L'EQUAZIONE MATRICIALE DÀ ORIGINE AD UN SISTEMA SCALARE CHE RISOLVIAMO CON GAUSS:

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ b + 2d = 0 \\ 2a + 4c = 0 \\ 2b + 4d = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ TROVIAMO LA MATRICE EQUIVALENTE

$$2R_1 - R_3 \to R_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

CORRISPONDE AD UNA EQUAZIONE NON RISOLVIBILE: $(0 = 2)$

E QUINDI IL SISTEMA NON HA SOLUZIONE

$\Rightarrow$ NON ESISTE IN QUESTO CASO LA MATRICE CHE MOLTIPLICATA ALLA PRIMA DIA LA MATRICE IDENTITÀ.

- FACCIAMO UN SECONDO ESEMPIO PER MATRICI 2x2:

ES.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ CERCHIAMO LA SOLUZIONE DEL SISTEMA ASSOCIATO: $\Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2 - R_4 \to R_4}{\overset{R_1 - R_3 \to R_3}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

: IL RANGO È 4 $\Rightarrow$ IL SISTEMA HA SOLUZIONE $\Rightarrow$

IN QUESTO CASO LA MATRICE INVERSA ESISTE!!.

DUNQUE ESSA NON DIPENDERÀ DALL'ORDINE MA DALLE ENTRATE DELLA MATRICE QUADRATA

CERCHIAMO IL RANGO DELLA MATRICE:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_1 - R_2 \to R_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

RANGO: $rg\,A = rk\,A = 1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_1 + R_2 \to R_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad rg\,A_1 = 2$$

TALE ESEMPIO CONFERITA LA SEGUENTE PROPOSIZIONE:
QUANDO IL RANGO DELLA MATRICE È PARI ALL'ORDINE DELLA MATRICE QUADRATA ⇒ ESISTE L'INVERSA.

- DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA: È UNO SCALARE ASSOCIATO ALLA MATRICE DATA; SI CALCOLA NEL SEGUENTE MODO:

1) DETERMINANTE MATRICE 1x1 $A = (a) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ IL DETERMINANTE DI A È a STESSO CIOÈ

$$\det A = \mathrm{Det}\,A = |a| = [a]$$

- ESEMPIO $(2) \Rightarrow |2| = 2$

2) DETERMINANTE DI UNA MATRICE 2x2 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

- ESEMPIO $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$

- ES. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$

INTUIAMO CHE:

PROPOSIZIONE. DATO $A \in \mathcal{M}_{m\times m} \Rightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow$ rg A NON È MASSIMO

PROPOSIZIONE: $A \in \mathcal{M}_{m\times m}$, A È INVERTIBILE $\Leftrightarrow$ rg A È MASSIMO $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

3) DETERMINANTE MATRICE 3×3: $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| =$$

(1) SCELGO UNA RIGA O COLONNA E NE CONSIDERO LE ENTRATE (ES. i-ESIMA RIGA)

(2) SE CONSIDERO L'ENTRATA a_{ij} di A DEVO CALCOLARE $(-1)^{i+j}$ E CONSIDERARE NEL CALCOLO DEL DETERMINANTE $(-1)^{i+j} \cdot a_{ij}$

(3) NELLA MATRICE A "CANCELLO" LA i-ESIMA E LA j-ESIMA COLONNA: RIMANE UNA MATRICE 2×2 DI CUI CALCOLO IL DETERMINANTE $|A_{\hat{i}\hat{j}}| = |A_{\widehat{ij}}|$

(4) CALCOLO $(-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{\widehat{ij}}|$

(5) ESEGUO $\sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{\widehat{ij}}| = |A|$ (CALCOLO DEL DETERMINANTE SECONDO Lagrange)

• ESEMPIO: $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$= 5 - 2 \cdot 0 - (-5) = 10$

4) SI ESTENDE AL DETERMINANTE di MATRICE $m \times m$:

SIA $A \in \mathcal{M}_{m\times m} \Longrightarrow |A| = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot |A_{\widehat{ij}}|$

PER UN QUALUNQUE i TRA 1 ED n.

• ESEMPIO:

SCELGO LA 2° RIGA

$$\to \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 1\cdot(+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 +$$

$$+ 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 + 2\cdot\left(1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} +\right.$$

$$\left. + 3\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) = 2\cdot 9 - 1(-5) + 0 + 2\cdot(-10) + 5 + 0 +$$

$$+ 2(5 - 14 - 9) = 18 + 5 - 20 + 5 - 36 = -28$$

PROPRIETÀ DEI DETERMINANTI:

1) SE UNA RIGA O UNA COLONNA DI UNA MATRICE HA SOLO ENTRATE NULLE $\Rightarrow$ IL DETERMINANTE È NULLO

2) MATRICI EQUIVALENTI HANNO ENTRAMBE DETERMINANTE NULLO O DIVERSO DA ZERO.