7 Marzo 2016

Esercizio 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?

Troviamo il polinomio caratteristico di A

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \underbrace{(2-\lambda)\left[(1-\lambda)(-1-\lambda)\right]}_{\text{già scomposto}} = 0$$

$\Rightarrow$ abbiamo 3 radici caratteristiche, cioè 3 autovalori distinti: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$; si ha che $\mu(2) = 1$, $\mu(1) = 1$, $\mu(-1) = 1$

$$\text{Spec}A = \{2; 1; -1\}$$

Bisogna cercare gli autospazi relativi agli autovalori.

Sappiamo già che A è ~~...~~ diagonalizzabile, poiché la dimensione di ogni autospazio COINCIDE CON LA MOLTEPLICITÀ DELL'AUTOVALORE: $\dim E_{\lambda j} = \mu(\lambda j) = 1$ $\forall j = 1, 2, 3$. La matrice diagonale simile ad A è

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ non è l'unica matrice diagonale, POICHÈ TALE MATRICE È DEFINITA A MENO DELL'ORDINE DEGLI AUTOVALORI.

$\Rightarrow$ sappiamo che $D = S^{-1} A S$ con S matrice invertibile definita dalle coordinate di vettori l. ind. che sono autovettori.

Determinare matrice **S**: è DEFINITA ~~fondamentalmente~~ dal cambio di base. Si determina quindi la base $\mathcal{B}$

di autovettori rispetto alla quale $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = D$ con $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ operatore associato ad A nella base $\mathcal{C}$.

Cerchiamo E_2 : $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x+2y=0 \\ -2x-2y-3z=0 \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} 2y = x \\ z = -x \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{B}_{E_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

Cerchiamo E_1 : $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases} \qquad \mathcal{B}_{E_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

E_{-1} : $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \mathcal{B}_{E_{-1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

RICORDIAMO CHE:
I vettori che corrispondono ad autovalori DIVERSI son l. ind.

$\Rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\Rightarrow$ in cui l'ordine DEI VETTORI deve essere coerente con QUELLO DEGLI AUTOVALORI SULLA DIAGONALE della matrice diagonale scelta.

Coordinate nella base canonica

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow S^{-1} A S = D$$

Se si fossero trovati autovalori con molteplicità $\mu > 1$, allora si dovrà trovare $\dim E_\lambda$ in modo tale che $\dim E_\lambda = \mu(\lambda) \Longrightarrow$ è diagonalizzabile

Se $\dim E_\lambda \neq \mu(\lambda)$ allora non è diagonalizzabile.

[Se A è simmetrica $\Longrightarrow$ A è diagonalizzabile.]

Esercizio 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 0$

$\mu(2) = 2 \quad \mu(0) = 0$

$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) \longmapsto (x+2y+z,\ 2y,\ x-2y+z)$ è diagonalizzabile?

$\Rightarrow \exists D$ tale che $D = S^{-1}AS$ è $\longrightarrow D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$

POICHÉ $rg A < 3$, $\lambda = 0$ È AUTOVALORE

$E_0 = \operatorname{Ker} T$ ha dimensione 1.

$E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x + 2y + z = 0 \Leftrightarrow x = 2y + z$

$\dim E_2 = 2 = \mu(2) \Rightarrow$ è diagonalizzabile.

$\Rightarrow \mathcal{B}_{E_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$E_0 = \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases} \quad \mathcal{B}_{E_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad |A - \lambda I| = 0 \quad (\lambda + 1)^3 = 0$$

$$\operatorname{Spec} A = \{-1, -1, -1\} \quad \mu(-1) = 3$$

$$(A + I) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Il $rg(A+I)$ dovrebbe essere $= 0$, ma ciò è IMPOSSIBILE:

dim $(A+I)$ non può essere $3 \Rightarrow A$ non è diagonalizzabile.

L'unica possibilità sarebbe che A sia diagonale in partenza.

Applicazione della diagonalizzazione

Data A, cercare A^n con $n \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che A sia $\in \mathcal{M}_{m \times m}$ con m ~~generale~~

ED m ~~generale~~ $\in \mathbb{N}$

$$\text{Data } D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^2 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^2 \end{pmatrix}$$

È più veloce fare il quadrato di una matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oppure $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{1000} = \begin{pmatrix} 2^{1000} & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^{1000} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{1000} \end{pmatrix}$

<u>Proposizione</u> : L'n-esima potenza di una matrice diagonale è una matrice diagonale i cui elementi sono le n-esime potenze degli elementi della diagonale della matrice di partenza.

<u>Dimostrazione</u> : per ricorrenza. DIMOSTRATO SOPRA: cvd

Ora supponiamo di avere $A \in M_{n \times n}$ e di volerne la sua n-esima potenza. Se A è diagonalizzabile $\Rightarrow$ sappiamo che $\exists\, D$ ed S tali che $D = S^{-1} A S$ o equivalentemente $A = SDS^{-1}$ $\Rightarrow A^n = (SDS^{-1})^n =$

$$= \underbrace{(SDS^{-1})(SDS^{-1}) \dots (SDS^{-1})}_{n \text{ volte}} = SD\cancel{(S^{-1}S)}D(S^{-1}S) \dots (S^{-1}S)DS^{-1}$$

ma $(S^{-1}S) = I \Rightarrow (SDS^{-1})^n = S\underbrace{D \dots D}_{n \text{ volte}}S =$

$$= SD^nS^{-1}.$$

$$\Rightarrow A^n = SD^nS^{-1}.$$

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{dove } A^{1231}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{1231} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{1231} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{1232} & 1 & 0 \\ 2^{1231} & 0 & 0 \\ -2^{1232} & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{1231} & 2^{1232}-2 & 0 \\ 2^{1230} & 2^{1231} & 0 \\ -2^{1231} & -2^{1232}+2 & -1 \end{pmatrix}$$