Diamo una nuova caratterizzazione del rango di una matrice $m \times n$: le righe di una matrice possono essere viste come m vettori, detti appunto "vettori riga", in uno spazio n-dimensionale dove n coincide con il # di colonne della matrice: si dimostra che

Proposizione $\boxed{*}$. Il rango della matrice coincide con il numero massimo di vettori riga linearmente indipendenti

Dimostriamo la seguente proposizione equivalente alla precedente: k vettori sono <u>linearmente dipendenti</u> $\iff$ <u>sono nulli tutti i minori di ordine k della matrice $k \times n$ di cui essi sono vettori riga.</u>

Suppongo $k \leq n$

Dimostrazione: "$\Rightarrow$" Per formare tali minori dobbiamo supporre dunque $k \leq n$. Se $R_1, \dots, R_k$ sono l. dipendenti $\Rightarrow \exists$ almeno un $R_j = \alpha_1 R_1 + \dots + \alpha_{j-1} R_{j-1} + \alpha_{j+1} R_{j+1} + \dots \alpha_n R_k \Rightarrow$ ogni matrice $k \times k$ avente per righe parte di tali vettori presenta una riga combinazione lineare di altre perciò il suo determinante è nullo

Viceversa se ogni minore di ordine k è nullo $\Rightarrow$ i k vettori riga sono l. dipendenti perché in ogni sottomatrice una riga è combinazione lineare delle altre nella stessa relazione $\Rightarrow$ quel vettore riga R_j è combinazione lineare degli altri nella matrice in esame.

cvd

Da cui la proposizione $\boxed{*}$

Stesso ragionamento se usiamo le colonne della matrice come vettori di uno spazio m-dimensionale.

Da ciò possiamo dedurre che il # di vettori riga l. indipendenti (rango per riga) di una matrice coincide con il # di vettori colonna l. indipendenti (rango per colonne) della matrice stessa.

Dimostriamo ora la seguente

<u>Proposizione</u>: Data una matrice $A \in M_{k \times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$rg\, A = r \iff \exists$ un minore non nullo di ordine r in A ed ogni altro minore di ordine superiore è nullo

Dimostrazione: "$\Rightarrow$" $rg\, A = r \Rightarrow$ detta A' la matrice ridotta in forma a gradini canonica con trasformazioni elementari riga $\Rightarrow$

$$A' = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ r \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & * \cdots * & 0 & * & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 \cdots 0 & 1 & * & \cdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & * & & * \\ \hline 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Consideriamo la sottomatrice $r \times r$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_r \Rightarrow \det I_r = 1$

e le operazioni elementari riga non mutano la nullità di tale determinante ... perciò $\exists$ un minore di ordine r in A non nullo. Ogni sottomatrice di A' quadrata di ordine $> r$ avrà almeno una riga nulla $\Rightarrow$ il suo determinante è zero e tale sarà il determinante della sottomatrice di A da cui essa deriva mediante operazioni elementari riga.

Viceversa "$\Leftarrow$" ragionando sulla trasformazioni delle sottomatrici di A dalle ipotesi date segue che A' ha una forma uguale a quella sopra segnata e quindi $rg\, A = r$.

cvd

ORIENTAZIONE DI UNO SPAZIO

Se pensiamo alla retta orientata $\mathbb{R}$:

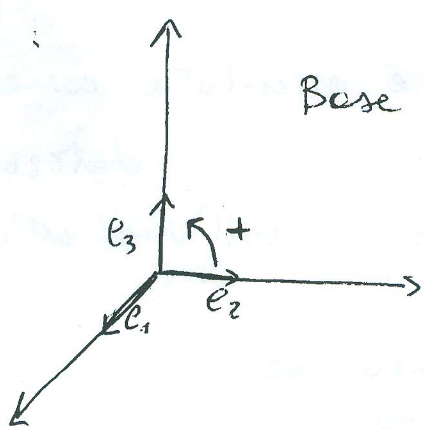
i multipli positivi di e_1 danno la stessa orientazione di e_1 su $\mathbb{R}$, mentre i multipli negativi di e_1 cambiano l'orientazione della retta $\mathbb{R}$.

Abbiamo 2 classi di equivalenza:

- αe_1 con $\alpha > 0$ Basi che danno a $\mathbb{R}$ orientazione positiva (da sinistra verso destra)
- αe_1 con $\alpha < 0$ Basi che danno ad $\mathbb{R}$ orientazione negativa

poichè il determinante della matrice del cambiamento di Base è proprio α!

(*) In $\mathbb{R}^3$:

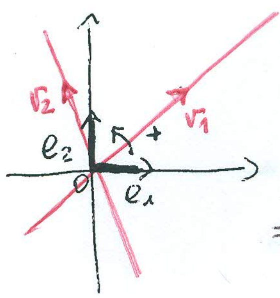


Base orientata positivamente

Si porta il II sul III ruotando in senso positivo/antiorario attorno ad e_1

Scambiando due vettori tra loro scambio due colonne della matrice di passaggio, cambiando così il segno del determinante: inverto l'orientazione dello spazio

In $\mathbb{R}^2$:



$\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ Quando scegliamo

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ una base orientiamo

lo spazio. AD ESEMPIO consideriamo il piano $\mathbb{R}^2$ ed una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$

$\Rightarrow$ La base è detta destrorsa se portando il primo vettore sul secondo (percorrendo l'angolo minore) si va in senso antiorario o positivo.

Effettuo un cambiamento di base $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$ e cerco la matrice del cambiamento di base $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

$$id : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}') \qquad [id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$
$$v \longmapsto v$$

Considero $\det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \neq 0$ perché v_1, v_2 sono linearmente indipendenti.

Se $\det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} > 0 \Rightarrow \mathcal{B}'$ è orientata come $\mathcal{B}$;

- due basi sono <u>EQUIVALENTI</u> se il determinante della matrice di passaggio dall'una all'altra è > 0.

Se $\det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} < 0 \Rightarrow$ cambio l'orientazione del piano.

Sia $A \in M_{p\times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ le righe di A sono VETTORI di uno spazio n dimensionale $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ essi generano un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ che indico con $R \Rightarrow R = \langle\langle R_1, R_2, R_3, \dots, R_p \rangle\rangle$ (RIGHE DI A). ESSO E' DETTO "SPAZIO RIGA"; LA SUA DIMENSIONE COINCIDE CON IL RANGO DI A
dim. $R = rk\, A = k$

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE LE OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA NON CAMBIANO LO SPAZIO RIGA DELLA MATRICE. DATA $A \in M_{p\times n}$, SIA B LA MATRICE EQUIVALENTE AD A OTTENUTA CON UNA OPERAZIONE ELEMENTARE RIGA: SE TALE OPERAZIONE E' LO SCAMBIO DI DUE RIGHE E' OVVIO CHE $R_A \equiv R_B$.

CONSIDERIAMO ORA UN'ALTRA OPERAZIONE ELEMENTARE RIGA PER LA QUALE:

SE $R_A = \langle\langle R_1, R_2, R_3, \dots, R_K \rangle\rangle \Rightarrow$ (DOVE A E B SONO LE MATRICI EQUIVALENTI)

$R_B = \langle\langle \underbrace{\alpha R_1 + \beta R_2}_{R_1'}, R_2, R_3, \dots, R_n \rangle\rangle$.

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE $R_A = R_B$ E CIOÈ:

$R_A \subseteq R_B$ e $R_B \subseteq R_A$

Proposizione: $R_A \subseteq R_B$

Dimostrazione: Sia $v \in R_A \Rightarrow v = J_1 R_1 + J_2 R_2 + \dots + J_K R_K \Rightarrow$ devo dimostrare che $v = b_1 \overbrace{(\alpha R_1 + \beta R_2)}^{R_1'} + b_2 R_2 + b_3 R_3 + \dots + b_K R_K$

É sufficiente dimostrare che ogni vettore della base $\{R_1, \dots, R_K\}$ di R_A é vettore dello spazio R_B, cioé ogni vettore della base di R_A é combinazione lineare della base ~~set~~ di R_B

Considero il vettore R_1: DIMOSTRIAMO CHE posso scrivere $R_1 = c_1 R_1' + c_2 R_2 + \dots + c_K R_K \Rightarrow R_1 = c_1(\alpha R_1 + \beta R_2) + c_2 R_2 + \dots + c_K R_K$

$\Rightarrow R_1 = c_1 \alpha R_1 + c_1 \beta R_2 + c_2 R_2 + \dots + c_K R_K \Rightarrow (c_1\alpha - 1) R_1 + c_1 \beta R_2 + \dots + c_K R_K = 0 \Rightarrow$

é sufficiente ~~prendere~~ CONSIDERARE CHE IL SEGUENTE SISTEMA HA SOLUZIONE NULLA ESSENDO $R_1, R_2, \dots, R_K$ LINEARMENTE INDIPENDENTI E QUINDI

$$\begin{cases} c_1 \alpha = 1 \\ c_1 \beta + c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ \vdots \\ c_K = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{\alpha} \\ c_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \\ c_3 = 0 \\ \vdots \\ c_K = 0 \end{cases}$$

POSSIAMO TROVARE I COEFFICIENTI DI R_1

ANALOGAMENTE SI DIMOSTRA CHE $R_B \subseteq R_A$ E QUINDI $R_A = R_B$

Abbiamo dimostrato che le operazioni elementari riga non modificano lo spazio riga.

Considerare il sottospazio di $\mathbb{R}^p$ generato dalle n colonne di una matrice $A \in M_{p \times n}$: le operazioni elementari riga sconvolgono le colonne e cambiano lo spazio $\Rightarrow$ Dimostrare