TEOREMA DI STRUTTURA PER GLI OPERATORI ISOMETRICI

Sia $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ operatore isometrico $\Rightarrow \exists\ B_{\perp n}$ di $\mathbb{R}^n$ tali che

$$[T]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & M_1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & M_k \end{pmatrix} \quad \text{con } M_j \begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{per } j = 1, \dots k \\ -\pi < \theta < \pi \end{matrix}$$

Dimostrazione (per induzione nella dimensione n di $\mathbb{R}^n$)

1) VERIFICA PER $n=1$: come già visto i possibili operatori isometrici $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono: l'identità $T(x) = x$ e $T_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x$ $\Rightarrow$ le matrici associate sono (1) e (-1) nella base canonica di $\mathbb{R}$.

ABBIAMO ANCHE VERIFICATO IL TEOREMA PER $n=2$.

2) Supponiamo il teorema verificato fino alla dimensione $n-1$ e dimostriamolo per la dimensione n.

[I possibili autovalori di un operatore isometrico sono $+1$ e -1, ma non è detto che esistano sempre, per esempio nelle rotazioni. In $\mathbb{C}$ ogni polinomio ammette sempre n soluzioni, ma in $\mathbb{R}$ sono limitati.]

a) Supponiamo che $\exists$ un autovalore reale $\lambda_0 \Rightarrow$ sappiamo che o $\lambda_0 = 1$ o $\lambda_0 = -1$. Considero v autovettore relativo a λ_0 $\Rightarrow$ o $T(v) = v$ o $T(v) = -v$, in ogni caso il sottospazio $\langle\langle v \rangle\rangle$, sottospazio di dimensione 1 in $\mathbb{R}^n$, è invariante per $T \Rightarrow$
$\Rightarrow$ considero $\langle\langle v \rangle\rangle^\perp$ in $\mathbb{R}^n$: sappiamo che tale sottospazio ha dimensione $n-1$ ed è invariante per T (quindi anche la sua immagine per T è ancora ortogonale a v),
cioè $T|_{\langle\langle v \rangle\rangle^\perp}\ \langle\langle v \rangle\rangle^T \longrightarrow \langle\langle v \rangle\rangle^\perp$ e $\rightarrow$

↳ Questo è ancora uno spazio euclideo e ancora isometrico.

$\rightarrow$ e $T|_{\langle\langle v \rangle\rangle^\perp}$ è ancora isometrico (coincide con T) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ per ipotesi di induzione $\exists$ una base B di $\langle\langle v \rangle\rangle^\perp$, ortonormale, rispetto alla quale

$$\left[T|_{\langle\langle v \rangle\rangle^\perp} \right]_B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & M_1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & M_k \end{pmatrix}$$

Ma $\langle\langle v \rangle\rangle \oplus \langle\langle v \rangle\rangle^\perp = \mathbb{R}^n$ quindi posso formare una base di $\mathbb{R}^n$ costituita dall'unione di una base di $\langle\langle v \rangle\rangle$ e di una base di $\langle\langle v \rangle\rangle^\perp$, considero $B_{\langle\langle v \rangle\rangle} = \left\{ \frac{v}{\|v\|} \right\}$ e B ortonormale di $\langle\langle v \rangle\rangle^\perp$ determinata prima $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ la base $B_{\mathbb{R}^n} = \left\{ \frac{v}{\|v\|} \right\} \cup B_{\langle\langle v \rangle\rangle^\perp}$ è base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ e

$$[T]_{B_{\mathbb{R}^n}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & \\ \vdots & 0 & \ddots 1 & & & 0 & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots -1 & & \\ & 0 & & & & M_1 & \\ 0 & & & & & & \ddots M_k \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

a meno di cambiare ~~[illegible]~~ l'ordine dei vettori nella base $B_{\mathbb{R}^n}$,

(Cioè se la prima entrata è $+1$ è al posto giusto, ma se è -1 dobbiamo cambiare l'ordine dei vettori)

abbiamo dimostrato il teorema NEL CASO ESISTANO AUTOVALORI REALI.

- abbiamo anche il caso in cui non esistono autovalori reali:

[Questa dimostrazione non è essenziale ai fini dell'esame, ma verrà fornita completa sul sito DEL CORSO, per chi volesse affrontarla ...]

TALE parte di questa dimostrazione VIENE QUI ESPOSTA A GRANDI LINEE

b) Supponiamo $\nexists$ autovalori reali $\Rightarrow$ gli autovalori sono complessi: sia $\lambda_0 \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_0 = \alpha + i\beta \Rightarrow$ dimostro che esiste un sottospazio di dimensione 2 invariante per T.

Sia $p(\lambda)$ il polinomio caratteristico di cui λ_0 sia radice, $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, con $\beta \neq 0 \Rightarrow p(\lambda) = |A - \lambda I|$ con $A = [T]_C \Rightarrow$

$\Rightarrow p(\lambda_0) = |A - \lambda_0 I| = 0$.

Considero il sistema lineare omogeneo $(A - \lambda_0 I)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = 0$.

~~[illegible]~~

Esso ha una soluzione non banale $Z = Z_x + i Z_y \in \mathbb{C}^n$ con $Z_x \in \mathbb{R}^n$ e $Z_y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ siano ~~sono~~ $[Z_x]_C = X$ e $[Z_y]_C = Y \Rightarrow$

$\Rightarrow$ considero $\langle\langle Z_x, Z_y \rangle\rangle$ in $\mathbb{R}^n$: questo è il candidato ad essere lo spazio due dimensionale invariante per T di cui abbiamo parlato.

Dimostro per assurdo che Z_x e Z_y sono linearmente indipendenti. (FARE PER CASA)

Facciamo vedere che è invariante per T:

abbiamo $(A-\lambda_0 I)(X+iY)=0$ (soluzione non banale del nostro polinomio) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow A(x+iy)=\lambda_0 I(x+iy) \Rightarrow A(x+iy)=(\alpha+i\beta)I(x+iy) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Ax}+i\,\underline{Ay}=\underline{\alpha x-\beta y}+i\,\underline{(\beta x+\alpha y)} \Rightarrow \begin{cases} Ax=\alpha x-\beta y \\ Ay=\beta x+\alpha y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(z_x)=\alpha z_x-\beta z_y \\ T(z_y)=\beta z_x+\alpha z_y \end{cases} \Rightarrow \langle\langle z_x, z_y\rangle\rangle \text{ è invariante per } T.$$

$V=\langle\langle z_x, z_y\rangle\rangle \rightarrow$ Considero $B_V=\{z_x, z_y\} \Rightarrow T|_V = T_1$ ha matrice $[T_1]_{B_V}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}=A_1$

$\Rightarrow$ Si dimostra che A_1 è ORTOGONALE (da fare a casa 🏠)
(la trasposta di questa matrice deve coincidere con la sua inversa)
(T è invertibile per ipotesi, poiché è un operatore isometrico)

Devo dimostrare che $z_x \cdot z_y = 0$. (FARE A CASA PER ESERCIZIO)
Poi si trova che $\|z_x\|=\|z_y\|=\gamma \Rightarrow B_V'=\left\{\frac{z_x}{\gamma}, \frac{z_y}{\gamma}\right\}$ è ORTONORMALE.

Considero ora il complemento ortogonale di V: è uno spazio $(n-2)$-dimensionale per il quale il teorema è già stato dimostrato $\Rightarrow$ prendo in $V^\perp$ la base ortonormale $B_{V^\perp}$ per la quale $[T|_{V^\perp}]_{B_{V^\perp}}$ è quella data dal teorema.

Ora unisco le due basi per avere la base di $\mathbb{R}^n$ richiesta.

La matrice associata a $T|_V$ nella base B'_V è $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$,

allora a meno di riordinare i vettori della base di $\mathbb{R}^n$ ottengo la matrice richiesta dal teorema.

c.v.d.

- 2 operatori isometrici in un piano — ROTAZIONE / SIMMETRIA rispetto a una retta + le loro composizioni

- Se la matrice è simmetrica ⟹ è ortogonalmente diagonalizzabile.
  ⇓
  ho senz'altro degli autovalori poiché la diagonalizzo.

- Se la matrice non è simmetrica, non sarà diagonalizzabile
  ⇓
  Queste matrici (2×2) danno rotazioni in piani 3-D.

~~Possiamo distinguere i~~

Se la matrice iniziale associata all'operatore T isometrico è <u>SIMMETRICA</u> ⟹ è diagonalizzabili (ortogonalmente) e quindi la matrice cercata nel teorema in questo caso sarà

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Se non è diagonalizzabile (<u>non</u> è SIMMETRICA) ⟹ contiene sottomatrici del tipo $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, quindi T sarà "composto" anche da ROTAZIONI.

Nel caso della <u>DIMENSIONE 3</u> avremo i seguenti tipi di matrici (sono 6):

$$I, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

<u>ESERCIZIO</u>:

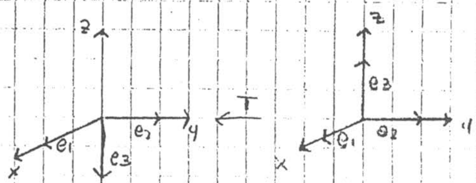
Descrivere geometricamente gli operatori $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associati alle matrici date.

LE ISOMETRIE IN $\mathbb{R}^3$

Tipi di isometrie vettoriali associate a matrici:

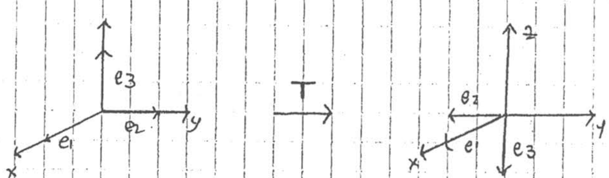
1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Isometria ovvia: IDENTITÀ

2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$



(Simmetria, Specchiamento) Ribaltamento rispetto al piano $z=0$

3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$



tipo quando θ è π

Rotazione del piano intorno all'asse x di un angolo $\theta = \pi$

4) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (Simmetria rispetto all'origine) = rotazione di angolo π attorno all'asse z nel piano $z=0$ e in quelli ad esso paralleli composta con uno specchiamento rispetto al piano $z=0$.

5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ I trasformati $\in$ piano $x=0$ e ruotano su questo piano di un angolo θ [rotazione senso positivo] cioè rotazione intorno all'asse x.

6) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ L'asse x non varia poichè la rotazione avviene in piani $\perp$ ad $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$, però la coordinata x viene ribaltata:

<u>Rotazione</u> + Ribaltamento