Proposizione (METODO DI JACOBI) 4/4/2018

Sia $Q : V \to \mathbb{R}$ forma quadratica e $A = [Q]_B$ una matrice ad essa associata in una base B di V e supponiamo che i minori principali di Nord-ovest $= d_k \ \forall k = 1, \dots, n-1$, con $n = \dim V$, siano $\neq 0 \Rightarrow \exists \tilde{B}$ di V per la quale

$$[Q]_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{d_2}{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \frac{d_3}{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{d_n}{d_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Es. di minori principali $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow$ minore principale ad es. è: $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ è minore princ. di $\boxed{\text{N-O}}$ (NORD-OVEST)

↳ cioè costituito dalle prime k righe e dalle prime k colonne.

SE LA MATRICE A ASSOCIATA ALLA FORMA QUADRATICA CHE VOGLIAMO STUDIARE È

$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Signatura $= (1, 1)$ E QUINDI SAPPIAMO CHE TALE FORMA È INDEFINITA

(~~$\det A = -3 \times 2(-6) + 3(-3) = -3 + 12 - 9 = 0$~~)

COME CONSEGUENZE DEL TEOREMA DI JACOBI SI HANNO:

Criterio di positività: $Q(x)$ forma quadratica è definita positiva $\Leftrightarrow$ i minori principali di N-O sono tutti positivi per una qualunque matrice associata a Q.

Criterio di negatività: $Q(x)$ " " è definita negativa $\Leftrightarrow$ i minori principali di N-O di ordine dispari sono tutti negativi e quelli di ordine pari positivi.

METODO DI GAUSS DI RIDUZIONE DELLE FORME QUADRATICHE

$Q\binom{x}{y} = ax^2 + bxy + cy^2$: FORMA QUADRATICA NELLE VARIABILI x, y di $\mathbb{R}^2$;

$Q\binom{z}{t} = \alpha z^2 + \beta t^2$: SE CAMBIAMO BASE IN $\mathbb{R}^2$ E QUINDI CAMBIAMO VARIABILI NELLE NUOVE VARIABILI z, t LA FORMA QUADRATICA È IN FORMA CANONICA, CIOÈ SOMMA DI QUADRATI

Sfrutteremo due uguaglianze algebriche: $x^2 + 2xy = (x+y)^2 - y^2$

$$4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$$

Proposizione

Una forma quadratica può sempre essere scritta come somma algebrica di quadrati.

DIMOSTRAZIONE per induzione sulla dimensione dello spazio V:

$Q : V \to \mathbb{R}$

1) verifico per $n = 1$ $\quad Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to ax^2$ $\quad$ ovvio

2) Supponiamo vera la proposizione fino a $(n-1)$ variabili e dimostriamola per n variabili

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

• 2a) Supponiamo che nell'espressione di $Q(x)$ ci sia il termine x_1^2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ riscrivo $Q(x) = a_{11}x_1^2 + R(x_2,\dots,x_n)x_1 + S(x_2,\dots,x_n)$ → f. quadratica in $(n-1)$ variabili.

↳ forma lineare in $(n-1)$ variabili.

$S(x_2,\dots,x_n)$ per induzione sarà data come somma di quadrati

Opero su $a_{11}x_1^2 + R(x_2,\dots,x_n)x_1 \overbrace{\;}^{+S(x_2,\dots,x_n)} = a_{11}\left(x_1^2 + \frac{R(x_2,\dots,x_n)}{a_{11}}x_1\right) + S(x_2,\dots,x_n)$

$$= a_{11}\cancel{\Big[}\left(x_1 + \frac{R(x_2,\dots,x_n)}{2a_{11}}\right)^2 - \frac{R(x_2,\dots,x_n)^2}{4a_{11}^2}\cancel{\Big]}\cdot a_{11} + S(x_2,\dots,x_n)$$

Cambio le variabili (cioè cambio la base)

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \dfrac{R(x_2,\dots,x_n)}{a_{11}} \\ y_2 = x_2 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases} \Rightarrow Q(y) = a_{11}y_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij}y_iy_j$$

per induzione è scritta come somma di quadrati.

• 2b) Supponiamo che esista solo il termine $a_{12}x_1x_2$ per le variabili x_1 e x_2, e non siano presenti i loro quadrati.

f. lineare in $(n-2)$ variabili; f. quadratica in $(n-2)$ variabili.

$$Q(x) = a_{12}x_1x_2 + R_1(x_3,\dots,x_n)x_1 + R_2(x_3,\dots,x_n)x_2 + S(x_3,\dots,x_n)$$

$$= \underbrace{S(x_3,\dots,x_n)+}\,a_{12}\left(x_1x_2 + \frac{R_1}{a_{12}}x_1 + \frac{R_2}{a_{12}}x_2\right) = a_{12}\cancel{\Big[}\left(x_1 + \frac{R_2}{a_{12}}\right)\left(x_2 + \frac{R_1}{a_{12}}\right) - \frac{R_1R_2}{a_{12}^2}\cancel{\Big]}\cdot a_{12} + S(x_3,\dots,x_n)$$

Cambio le variabili

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \dfrac{R_2}{a_{12}} \\ y_2 = x_2 + \dfrac{R_1}{a_{12}} \\ y_3 = x_3 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases} \Rightarrow Q(y) = a_{12}y_1y_2 + \underbrace{S_1}_{\frac{R_1R_2}{a_{12}} + S}(y_3,\dots,y_n)$$

$$= a_{12}\frac{(y_1+y_2)^2 - (y_1-y_2)^2}{4} + S_1(y_3,\dots,y_n)$$

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 \\ z_2 = y_1 - y_2 \\ z_3 = y_3 \\ \vdots \\ z_n = y_n \end{cases} \Rightarrow Q(z) = \frac{a_{12}}{4}z_1^2 - \frac{a_{12}}{4}z_2^2 + S_1(z_3,\dots,z_n)$$

per induzione si scrive come somma di quadrati

C.V.D.

Esempio: Data $Q(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$

$Q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

- Scrivere la sua forma canonica con il metodo di Gauss.

$Q(x) = x_1^2 + x_1(-4x_2 + 2x_3) + 4x_2^2 + x_3^2$

$Q(x) = \left(x_1 + \frac{-\cancel{4}^{2} x_2 + \cancel{2}x_3}{\cancel{2}}\right)^2 - (-2x_2 + x_3)^2 + 4x_2^2 + x_3^2 = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + 4x_2x_3$

Cambio le variabili $\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow Q(y) = y_1^2 + 4y_2y_3 =$

$= y_1^2 + (y_2 + y_3)^2 - (y_2 - y_3)^2$

$\Rightarrow$ Cambio le variabili $\Rightarrow \begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + y_3 \\ z_3 = y_2 - y_3 \end{cases} \Rightarrow Q(Z) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$

$[Q]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ MENTRE $[Q]_e = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Trasformazione totale $\begin{cases} z_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ z_2 = x_2 + x_3 \\ z_3 = x_2 - x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

permette di passare dalla base canonica alla base cercata.

LA MATRICE S CERCATA È A^{-1}:

$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\}$ è una base f_Q-ortogonale

e inoltre A^{-1} è la matrice S t.c. $[Q]_B = S^T [Q]_e S$.