2/12/15

ESEMPIO:

$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (quindi abbiamo 3 coordinate)

$(x;y) \to (x+y-2, x^2, y)$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x;y) \to x^2$; $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \to x+y-2$; $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \to -y$: SONO LE FUNZIONI COMPONENTI DI L

visti $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ come spazi vettoriali, L è lineare?

$$\left.\begin{array}{l} ① \ \forall\, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow L(v_1+v_2) = L(v_1)+L(v_2) \\ ② \ \forall\, v \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R} \quad L(\alpha v) = \alpha L(v) \end{array}\right\} \text{le dobbiamo verificare}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1+v_2 = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow L(v_1+v_2) =$$

$$\boxed{L(v_1+v_2)} = (x_1+x_2+y_1+y_2-2,\ (x_1+x_2)^2,\ -(y_1+y_2))$$

$\neq$

$$\boxed{L(v_1)+L(v_2)} = (x_1+y_1-2,\ x_1^2,\ -y_1) + (x_2+y_2-2,\ x_2^2,\ -y_2) = (x_1+x_2+y_1+y_2-4,\ x_1^2+x_2^2,\ -y_1-y_2)$$

$\Rightarrow$ applicazione NON è LINEARE

PROPOSIZIONE:
L'applicazione L, in forma cartesiana, è lineare se le coordinate del vettore immagine sono espresse mediante polinomi lineari omogenei nelle coordinate del dominio.

Teorema DIMENSIONI: Data $L: V \to W$ lineare $\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L = \dim V$

PROPOSIZIONE: Data $L: V \to W$ lineare $\Rightarrow$ L è INIETTIVA $\iff \operatorname{Ker} L = \{0\}$ (morfismo dello spazio vettoriale) (vettore nullo c'è sempre nel nucleo)

DIMOSTRAZIONE: "$\Rightarrow$" $\operatorname{Ker} L = \{v \in V / L(v) = 0\}$ = Sia $v \in \operatorname{Ker} L \Rightarrow L(v) = 0$ ma $0 = L(0)$, per quanto visto, $\Rightarrow L(v) = L(0) \Rightarrow$ poiché L è iniettiva (per ipotesi) $v = 0$

"$\Leftarrow$" Considero $v_1, v_2 \in V$ tali che $L(v_1) = L(v_2) \Rightarrow$
$L(v_1) - L(v_2) = 0 \Rightarrow L(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker} L \Rightarrow$
$v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$ c.v.d.

OSSERVAZIONE: Se $L: V \to W$ è lineare iniettiva $\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} L = 0$

CONSEGUENZA DEL Th delle dimensioni

$\exists$ applicazioni lineari suriettive tra $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$?
Cioè $\exists\ L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineare suriettiva?
Può essere $\dim \operatorname{Im} L = 3$? (IL VUOTO HA DIM = 1)

$$\dim \operatorname{Im} L = \dim V - \dim \operatorname{Ker} L$$

$$3 = 2 - \ldots \quad \text{IMPOSSIBILE!}$$

$\nexists$ applicazioni suriettive $L: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ con $p < q$!

$\exists$ applicazioni iniettive $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$? (SÌ, possono $\exists$)

$\dim \underset{\overset{\parallel}{0}}{\operatorname{Ker} L} + \underset{\parallel}{\dim} \operatorname{Im} L = \dim V$

$= 3$

$\exists$ applicazioni iniettive $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ → lo spazio (IMMAGINE, ESSENDO SOTTOSPAZIO) non potrà mai "uscire" dallo spazio, quindi la risposta è NO.

$\nexists$ applicazioni lineari iniettive $L: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ se $p > q$

Che possibilità hanno di esistere ~~spazi~~ APPLICAZIONI biettive? Tra quali spazi?

$L: V \to W$ lineare può essere un ISOMORFISMO se la $\dim V = \dim W$

(IL MORFISMO opera SULLA STRUTTURA ALGEBRICA → opera sulle operazioni)

• prendo un qualunque spa vett reale n-dimensionale ed $\mathbb{R}^n$ e cerco di creare un isomorfismo.:

Sia V uno spa. vett. reale n-dimensionale.

Fisso una base $\mathcal{B}_V$ ⇒ ogni vettore v (quindi ogni matrice, SE AD ESEMPIO V È LO SPAZIO DELLE MATRICI REALI p×n) si esprime come una combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ cioè $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$ ⇒ Considero l'applicazione

$$\phi: V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$v \longmapsto (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

È LINEARE (da dimostrare)

ϕ è lineare perché $\phi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \phi(v_1) + \alpha_2 \phi(v_2)$

(FARE PER ESERCIZIO)

È biettiva?

$\operatorname{Ker}\phi = \{0\}$?

$\operatorname{Ker}\phi = \{v \in V \,/\, \phi(v) = 0\}$ cioè $\phi(v) = (x_1, \dots, x_n) = 0 = (0, \dots, 0)$ ⇒

⇒ $x_j = 0 \;\; \forall j = 1, \dots, n$ ⇒ $v = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n = 0$ Quindi è INIETTIVA

È SURIETTIVA?

Considero $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ⇒ il vettore $w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ è tale che $\phi(v) = (a_1, \dots, a_n)$

È anche SURIETTIVA, quindi è ISOMORFISMO (non è unico, dipende dalla Base Fissata inizialmente)

ISOMORFISMO NON CANONICO (sono infiniti e non unico)

ESEMPIO:

$$(\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Q}, +)$$
$$n \longrightarrow \frac{n}{1}$$

morfismo biettivo tra $\mathbb{Z}$ e un "sotto gruppo" di $\mathbb{Q}$

ϕ è un morfismo di gruppi additivi

$(\phi(n_1 + n_2) = \phi(n_1) + \phi(n_2))$

ϕ è iniettivo se $\phi(n_1) = \phi(n_2) \Rightarrow \frac{n_1}{1} = \frac{n_2}{1} \Rightarrow \frac{n_1}{1} - \frac{n_2}{1} = 0 \Rightarrow \frac{n_1 - n_2}{1} = 0$

$\Rightarrow n_1 = n_2$

Considero $Im\,\phi = \{ \frac{n}{1} \in \mathbb{Q} \,/\, n \in \mathbb{Z} \} \Rightarrow$

$$\mathbb{Z} \underset{\text{ISOMORFO}}{\simeq} Im\,\phi \subseteq \mathbb{Q}$$

Se $L : V \to W$ è lineare, allora fissate le basi in V e W,

$\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_n\}$,

cerco $L(v)$ con $v \in V \Rightarrow v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n \Rightarrow$

$\Rightarrow L(v) = L(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = x_1 L(v_1) + x_2 L(v_2) + \dots + x_n L(v_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ L lineare è data se conosco le immagini dei vettori di base.

ESEMPIO: Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineare e considero $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$ DO LE IMMAGINI DEI VETTORI DI BASE $\Rightarrow L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dare L

$$L(v) = L(x v_1 + y v_2) = x L(v_1) + y L(v_2) = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x \\ 3x+y \end{pmatrix}$$

$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$(x, y) \longrightarrow (\underset{x'}{x-y}, \underset{y'}{2x}, \underset{z'}{3x+y})$

dare L supponendo che $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \mathcal{E}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x \\ 3x+y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = x-y \\ y' = 2x \\ z' = 3x+y \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{[L]^{B_{\mathbb{R}^3}}_{B_{\mathbb{R}^2}}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{[V]_{B_{\mathbb{R}^2}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{[L(v)]_{B_{\mathbb{R}^3}}}$$

$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$(x, y) \longrightarrow (2x+y, -x, x-y)$

- ora devo fissare le basi del dominio e del codominio

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \mathcal{E}$ $\quad \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

quando faccio questa operaz, le coordinate dei vettori sono sempre espresse nella base canonica, qualunque siano le basi degli spazi.

Cerco $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$ *

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

*
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \underset{3R_2-2R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{R_3-5R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -1 \end{array}\right) \; 5R_1-2R_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 4/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & -7/5 & 1/5 \end{array}\right)$$

le coordinate dei vettori della base espresse nel codominio

$$[L]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 4/5 & 3/5 \\ -7/5 & 1/5 \end{pmatrix} \Rightarrow [L]_{B_1}^{B_2} [v]_{B_{\mathbb{R}^2}} = [L(v)]_{B_{\mathbb{R}^2}}$$

FISSATE LE BASI NEL DOMINIO E NEL CODOMINIO, LA MATRICE ASSOCIATA ALL'APPLICAZIONE NELLE BASI DATE HA PER VETTORI COLONNA I VETTORI DELLE COORDINATE DELLE IMMAGINI DEI VETTORI DELLA BASE DEL DOMINIO, DETERMINATE COME COEFFICIENTI DELLA COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DELLA BASE DEL CODOMINIO.