2/11/2015

Proposizione: Dato V spazio vettoriale e $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B_2 = \{w_1, \dots, w_p\}$ basi di $V \Rightarrow n = p$

Dimostrazione:

1° caso $\boxed{n>p}$ B_2 base di $V \Rightarrow$ i vettori di B_1 sono linearmente dipendenti, ma B_1 e' base $\Rightarrow v_1 \dots v_k$ sono linearmente indipendenti $\rightarrow$ assurdo

2° caso $\boxed{n<p}$ B_1 base di $V \Rightarrow$ per ragionamento analogo al precedente $w_1 \dots w_p$ sono linearmente dipendenti, ma B_2 e' base di $V \rightarrow$ assurdo

Allora $\boxed{p=n}$ $\rightarrow$ la cardinalita' di una qualunque base di uno spazio vettoriale e' la stessa ed e' la DIMENSIONE di V.

Dato V, spazio vettoriale, di dimensione n, e $B = \{v_1 \dots v_n\}$ base di V: $[v_1]_B = ?$ $[v_2]_B = ?$ $\dots$ $[v_n]_B = ?$ $\Rightarrow$

$$[v_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad [v_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \dots; \quad [v_n]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio: determinare una base dello spazio dei polinomi $\mathbb{R}[x]_4$ di grado 4.

$\mathbb{R}[x]_4 = \{$polinomi a coeff. REALI, in una variabile, fino al grado 4$\}$

$\mathbb{R}[x]_4$ e' spazio vett. con le operazioni di "somma tra 2 polinomi" e "prodotto per uno scalare".

Esempio: $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4) =$

$= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + (a_3+b_3)x^3 + (a_4+b_4)x^4$

$\lambda \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \lambda a_3 x^3 + \lambda a_4 x^4$

$\rightarrow$ Dimostrare che $\mathbb{R}[x]_4$ e' spazio vettoriale.

Prendo $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$

Devo dimostrare che gli elementi di tale insieme sono generatori di $\mathbb{R}[x]_4$ e linearmente indipendenti.

→ Sono generatori perchè un qualunque elemento di $\mathbb{R}[x]_4$ è scritto così: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ e quindi è combinazione lineare di $\{1; x, x^2, x^3, x^4\}$

→ Sono linearmente indipendenti?

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = 0$ (0 = polinomio nullo)

se i due polinomi coincidono allora $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ perchè deve avere grado 0 e $a_0 = 0$ per avere l'uguaglianza ⇒ sono linearmente indipendenti.

$B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ è base di $\mathbb{R}[x]_4$.

la dimensione di $\mathbb{R}[x]_4$ è 5.

Dato $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \Rightarrow [p(x)]_B = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$ QUINDI

spazi n-dimensionali REALI POSSONO ESSERE RITENUTI $\mathbb{R}^n$

<u>Esempio:</u> sia $M_{2\times3}(\mathbb{R})$ spazio vett. Cerco la sua dimensione quindi cerco una base qualsiasi dello spazio $M_{2\times3}(\mathbb{R})$.

Un elemento qualunque di $M_{2\times3}(\mathbb{R})$ è $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} =$

$$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$ sono generatori.

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \varphi\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$ se $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon = \varphi = 0$

sono linearmente indipendenti.

$$\left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{RANGO}}$ DI UNA MATRICE.

__Definizione__: il rango di una matrice è dato dal n° massimo di righe (o di colonne), visti come vettori, linearmente indipendenti.

__Dimostrazione__: sia $A \in \mathcal{M}_{p\times n}$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots p \\ j=1\dots n}}$

supponiamo che il $rgA = k$ e che i pivot siano sulle prime k righe $\Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & & a_{pn} \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ \\ \\ k \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{1k+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & & \vdots & b_{2k+1} & & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & b_{kk+1} & & b_{kn} \\ \hline & & & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \vdots & & & \vdots \\ & & & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{k}$

I primi k vettori colonna della matrice ridotta a gradini in forma canonica sono linearmente indipendenti

SE AGGIUNGIAMO UN VETTORE COLONNA, IL q-ESIMO, $\Rightarrow$ SONO LIN. DIPENDENTI

INFATTI:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_k \begin{array}{c} \\ \\ \\ k \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_{k+1} \begin{pmatrix} b_{1q} \\ b_{2q} \\ \vdots \\ b_{kq} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_{k+1} b_{1q} = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_{k+1} b_{2q} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_k + \alpha_{k+1} b_{kq} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_{k+1} b_{1q} \\ \alpha_2 = -\alpha_{k+1} b_{2q} \\ \vdots \\ \alpha_k = -\alpha_{k+1} b_{kq} \end{cases}$$

__Definizione__: data $A \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ si dice $\boxed{\text{MINORE}}$ di ordine k della matrice A, il determinante di una sottomatrice $k \times k$ di A.

__Esempio__: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ci sono 6 minori di ordine 1 e 3 di ordine 2.

ESEMPIO:
minore di ordine 2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3$

__proposizione__: il rango di una matrice A generica $p \times n$ è l'ordine massimo dei minori non nulli della matrice.

DIMOSTRARLO PER ESERCIZIO.